쉽고 빠르게 정리하는

수학 I

9종 교과서 시크릿

정답과 풀이

I. 지수함수와 로그함수

되짚어 보기

본문 4쪽

01 (1) a^5b^4 (2) 1
02 (1) 7 (2) 5
03 (1) ± 0.7 (2) ± 3
04 $y=(x-3)^2-2$
05 (1) $x=1$ 또는 $x=5$ (2) $1 \le x \le 3$
06 $y=\frac{x-1}{2}$

01 지수

교과서 유형 흐름잡기

본문 7~9쪽

유형 1	①	1-1 ③	1-2 ㄷ
유형 2	①	2-1 ③	2-2 (1) 6 (2) 9
유형 3	②	3-1 ⑤	3-2 1
유형 4	④	4-1 ⑤	4-2 ②
유형 5	④	5-1 ①	5-2 -80
유형 6	③	6-1 ②	6-2 ⑤

유형 1

① 27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=27$에서 $x^3-27=0$
$(x-3)(x^2+3x+9)=0$
$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 27의 세제곱근 중 실수인 것은 3이다.

② -8의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-8$에서 $x^3+8=0$
$(x+2)(x^2-2x+4)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$
따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2이다.

③ 1의 네제곱근을 x라 하면
$x^4=1$에서 $x^4-1=0$
$(x+1)(x-1)(x^2+1)=0$
$\therefore x=\pm 1$ 또는 $x=\pm i$
따라서 1의 네제곱근은 -1, 1, $-i$, i이다.

④ 네제곱근 16은 $\sqrt[4]{16}=2$이다.

⑤ -16의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=-16$
그런데 $x^4 \ge 0$이므로 방정식을 만족시키는 실근은 존재하지 않는다. 즉, -16의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.

답 ①

1-1

① -4의 제곱근을 x라 하면
$x^2=-4$에서 $x^2+4=0$
$(x+2i)(x-2i)=0$
$\therefore x=\pm 2i$
따라서 -4의 제곱근은 $-2i$, $2i$이다.

② -27의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-27$에서 $x^3+27=0$
$(x+3)(x^2-3x+9)=0$
$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.

③ 81의 네제곱근을 x라 하면
$x^4=81$에서 $x^4-81=0$
$(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$
$\therefore x=\pm 3$ 또는 $x=\pm 3i$
따라서 81의 네제곱근은 -3, 3, $-3i$, $3i$이다.

④ 네제곱근 81은 $\sqrt[4]{81}=3$이다.

⑤ $(-5)^3=-125$이므로 -125의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=-125$에서 $x^3+125=0$
$(x+5)(x^2-5x+25)=0$
$\therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{5\pm 5\sqrt{3}i}{2}$
따라서 $(-5)^3$의 세제곱근 중 실수인 것은 -5이다.

답 ③

1-2

ㄱ. 64의 세제곱근을 x라 하면
$x^3=64$에서 $x^3-64=0$
$(x-4)(x^2+4x+16)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm 2\sqrt{3}i$
따라서 64의 세제곱근은 4, $-2-2\sqrt{3}i$, $-2+2\sqrt{3}i$이다. (거짓)

ㄴ. 9의 네제곱근을 x라 하면
$x^4=9$에서 $x^4-9=0$
$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x^2+3)=0$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$

따라서 9의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$이다. (거짓)

ㄷ. 자연수 n이 홀수일 때, 3의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$의 한 개이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ㄷ

유형 2

① $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\times16}=\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$

② $(\sqrt[4]{7})^8=7^2=49$

③ $\{\sqrt[3]{(-2)^2}\}^3=(\sqrt[3]{4})^3=4$

④ $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{9}}=\sqrt[3]{\frac{243}{9}}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

⑤ $\sqrt[4]{\sqrt{256}}=\sqrt[4\times2]{256}=\sqrt[8]{2^8}=2$ 답 ①

2-1

① $(\sqrt{4})^4=4^2=16$

② $\{\sqrt[4]{(-3)^2}\}^2=(\sqrt[4]{9})^2=\sqrt{9}=3$

③ $\sqrt{\sqrt[5]{32}}=\sqrt{\sqrt[5]{2^5}}=\sqrt{2}$

④ $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{256}}{\sqrt[3]{-8}}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{16^2}}{\sqrt[3]{(-2)^3}}}=\sqrt[3]{\frac{16}{-2}}=\sqrt[3]{-8}=-2$

⑤ $\sqrt[9]{2^6}\times\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3\times3]{2^{2\times3}}\times\sqrt[2\times3]{2^2}=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3}=2$ 답 ③

2-2

(1) $\sqrt{\sqrt{(-3)^4}}\times\sqrt[3]{\sqrt{(-2)^6}}=\sqrt[2\times2]{3^4}\times\sqrt[3\times2]{2^6}$

$=3\times2=6$

(2) $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{3}}\times\sqrt{\frac{27}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{243}}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{3}}$

$=\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}\times\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt[4]{\frac{243}{3}}\times\sqrt{\frac{27}{3}}$

$=\sqrt[4]{81}\times\sqrt{9}$

$=3\times3=9$

답 (1) 6 (2) 9

유형 3

$\sqrt{\sqrt{a^3b^2}\div\sqrt[3]{ab^2}}=\{(a^3b^2)^{\frac{1}{2}}\div(ab^2)^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{3}{2}}b\div a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}b^{1-\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{1}{6}}$ 답 ②

3-1

$\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}\times\sqrt[4]{a^3}}}=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}-\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}$

$=(a^{-\frac{7}{12}})^{\frac{1}{2}}=a^{-\frac{7}{24}}$ 답 ⑤

3-2

$\sqrt[4]{ab^3}\times\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}\div\sqrt{ab}}=(ab^3)^{\frac{1}{4}}\times\{(a^2b)^{\frac{1}{3}}\div(ab)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\times(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\times(a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\times(a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{12}}b^{-\frac{1}{12}}$

$=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}b^{\frac{3}{4}-\frac{1}{12}}$

$=a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

따라서 $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$이므로

$x+y=1$ 답 1

유형 4

$\sqrt[6]{6}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{10}}=\sqrt[12]{10}$에서 6, 3, 12의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt[6]{6}=\sqrt[12]{6^2}=\sqrt[12]{36}=36^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}=16^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[12]{10}=10^{\frac{1}{12}}$

이때 지수가 $\frac{1}{12}$로 같고, $10<16<36$이므로

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{10}}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[6]{6}$ 답 ④

다른풀이

주어진 세 수를 모두 12제곱하면

$(\sqrt[6]{6})^{12}=6^2=36$

$(\sqrt[3]{2})^{12}=2^4=16$

$(\sqrt[4]{\sqrt[3]{10}})^{12}=10$

이때 $10<16<36$이므로 $\sqrt[4]{\sqrt[3]{10}}<\sqrt[3]{2}<\sqrt[6]{6}$

4-1

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}=\sqrt[12]{6}$, $\sqrt[8]{3}$, $\sqrt[6]{2}$에서 12, 8, 6의 최소공배수가 24이므로

$\sqrt[12]{6}=\sqrt[24]{6^2}=\sqrt[24]{36}=36^{\frac{1}{24}}$

$\sqrt[8]{3}=\sqrt[24]{3^3}=\sqrt[24]{27}=27^{\frac{1}{24}}$

$\sqrt[6]{2}=\sqrt[24]{2^4}=\sqrt[24]{16}=16^{\frac{1}{24}}$

이때 지수가 $\frac{1}{24}$로 같고, $16<27<36$이므로

$\sqrt[6]{2}<\sqrt[8]{3}<\sqrt[3]{\sqrt[4]{6}}$ 답 ⑤

4-2

2, 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$\sqrt{2}=\sqrt[12]{2^6}=\sqrt[12]{64}=64^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}=\sqrt[12]{256}=256^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[4]{6}=\sqrt[12]{6^3}=\sqrt[12]{216}=216^{\frac{1}{12}}$

$\sqrt[6]{12}=\sqrt[12]{12^2}=\sqrt[12]{144}=144^{\frac{1}{12}}$

이때 지수가 $\frac{1}{12}$로 같고, $64<144<216<256$이므로

$\sqrt{2}<\sqrt[6]{12}<\sqrt[4]{6}<\sqrt[3]{4}$

따라서 $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{4}$이므로

$ab=\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}=2^{\frac{7}{6}}$ 답 ②

유형 5

$a^{\frac{1}{3}}=X$, $b^{-\frac{1}{3}}=Y$로 놓으면 $a^{\frac{2}{3}}=X^2$, $b^{-\frac{2}{3}}=Y^2$이므로

$(a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}})$

$=(X-Y)(X^2+XY+Y^2)$

$=X^3-Y^3$

$=(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{-\frac{1}{3}})^3$

$=a-b^{-1}=a-\frac{1}{b}$ 답 ④

5-1

$x^{\frac{1}{3}}=X$, $x^{-\frac{1}{3}}=Y$로 놓으면

$x^{\frac{2}{3}}=X^2$, $x^{-\frac{2}{3}}=Y^2$, $x=X^3$, $x^{-1}=Y^3$이고,

$XY=x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}=1$이므로

$(x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+1)(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}})\div(x-x^{-1})$

$=(X^2+Y^2+XY)(X^2-Y^2)\div(X^3-Y^3)$

$=\frac{(X^2+Y^2+XY)(X-Y)(X+Y)}{X^3-Y^3}$

$=\frac{(X^3-Y^3)(X+Y)}{X^3-Y^3}$

$=X+Y=x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$ 답 ①

5-2

$(1-3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{4}})(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3)(1+3^2)$

$=(1-3^{\frac{1}{2}})(1+3^{\frac{1}{2}})(1+3)(1+3^2)$

$=(1-3)(1+3)(1+3^2)$

$=(1-3^2)(1+3^2)$

$=1-3^4$

$=1-81=-80$ 답 -80

유형 6

주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{(a^x+a^{-x})a^x}{(a^x-a^{-x})a^x}=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$

$=\frac{2+1}{2-1}=3$ 답 ③

6-1

주어진 식의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^{3x}+a^{-3x})a^x}{(a^x+a^{-x})a^x}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}$

$=\frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}+1}=\frac{3^2+3^{-1}}{3+1}$

$=\frac{9+\frac{1}{3}}{4}=\frac{7}{3}$ 답 ②

6-2

$(a^{3x}-a^{-3x})(a^x-a^{-x})^{-1}=\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$이므로

분모, 분자에 각각 a^x을 곱하면

$\frac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{(a^{3x}-a^{-3x})a^x}{(a^x-a^{-x})a^x}=\frac{a^{4x}-a^{-2x}}{a^{2x}-1}$

$=\frac{(a^{2x})^2-(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}$

$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}+1)^{-1}}{(\sqrt{2}+1)-1}$

$=\frac{3+2\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$

$=\frac{4+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+1$ 답 ⑤

교과서 문제 정복하기

› 본문 10~11쪽

01 ⑤	02 3	03 ④	04 ②	05 2
06 ⑤	07 ②	08 ①	09 ②	10 33
11 $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$		12 36	13 ④	14 ④
15 ②	16 ④			

01

① 25의 제곱근은 -5, 5이다.

② 8의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=8$에서 $x^4-8=0$

$(x+\sqrt[4]{8})(x-\sqrt[4]{8})(x^2+\sqrt{8})=0$

$\therefore x=\pm\sqrt[4]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[4]{8}i$

따라서 8의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[4]{8}$이다.

③ $\sqrt[4]{(-3)^6}$은 $(-3)^6$의 양의 네제곱근이다.

④ $\sqrt{256}=16$이므로 16의 네제곱근을 x라 하면

$x^4=16$에서 $x^4-16=0$

$(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$

$\therefore x=\pm2$ 또는 $x=\pm2i$

따라서 $\sqrt{256}=16$의 네제곱근 중 실수인 것은 -2, 2이다.

⑤ $\sqrt{64}=8$이므로 8의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=8$에서 $x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

따라서 $\sqrt{64}$의 세제곱근 중 실수인 것은 2이다. 답 ⑤

02

-4의 세제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[3]{-4}$의 1개이므로 $a=1$

256의 네제곱근 중에서 실수인 것은 -4, 4의 2개이므로

$b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$ 답 3

03

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{3}}}\times\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt[4]{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}}}\times\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[4]{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[6]{3}}\times\frac{\sqrt[8]{3}}{\sqrt[4]{3}}\times\frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[8]{3}}$$
$$=\frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[6]{3}}=\frac{\sqrt[12]{3}}{\sqrt[12]{3^2}}$$
$$=\sqrt[12]{\frac{3}{9}}=\sqrt[12]{\frac{1}{3}}$$

즉, $\sqrt[n]{\frac{1}{3}}=\sqrt[12]{\frac{1}{3}}$이므로 $n=12$ 답 ④

04

$$\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4\sqrt{8}}}=\sqrt[4]{4}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}$$
$$=\sqrt[4]{2^2}\times\sqrt[12]{2^2}\times\sqrt[24]{2^3}$$
$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}=2^{\frac{19}{24}}$$

즉, $2^k=2^{\frac{19}{24}}$이므로 $k=\frac{19}{24}$ 답 ②

05

$\{(a^2)^{-1}\}^2=0.0625$이므로

$a^{-4}=0.0625$, $\frac{1}{a^4}=\frac{1}{2^4}$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$) 답 2

06

$a=\sqrt[4]{2}$이므로

$$a^{20}\times a^{-6}\div(a^2)^{-1}=a^{20}\times a^{-6}\times a^2=a^{16}$$
$$=(\sqrt[4]{2})^{16}=2^4=16$$ 답 ⑤

07

$$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{0.75}\times\left\{\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{5}{4}}\right\}^{-\frac{2}{5}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}^{0.75}\times\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times\frac{5}{4}\times\left(-\frac{2}{5}\right)}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$$
$$=\frac{1}{8}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{32}$$ 답 ②

08

$l^2=(\sqrt[4]{25})^2+(\sqrt[4]{24})^2=\sqrt[4]{25^2}+\sqrt[4]{24^2}$

$=\sqrt{25}+\sqrt{24}=5+2\sqrt{6}$ 답 ①

09

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}$, $B=\sqrt{5}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{38}}=\sqrt[6]{38}$

에서 2와 6의 최소공배수가 6이므로

$A=\sqrt[6]{10}=10^{\frac{1}{6}}$

$B=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}=125^{\frac{1}{6}}$

$C=\sqrt[6]{38}=38^{\frac{1}{6}}$

이때 지수가 $\frac{1}{6}$로 같고, $10<38<125$이므로

$10^{\frac{1}{6}}<38^{\frac{1}{6}}<125^{\frac{1}{6}}$

$\therefore A<C<B$ 답 ②

10

$\sqrt[3]{4^n}=4^{\frac{n}{3}}=2^{\frac{2n}{3}}$

$2^{\frac{2n}{3}}$이 정수가 되려면 $\frac{2n}{3}$이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 n은 100 이하의 3의 배수이어야 하므로 n은 3, 6, 9, …, 99의 33개이다. 답 33

11

$x^{\frac{1}{4}}=X$, $y^{\frac{1}{4}}=Y$로 놓으면 $x^{\frac{1}{2}}=X^2$, $y^{\frac{1}{2}}=Y^2$이므로

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}})$

$=(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2)$

$=X^4+X^2Y^2+Y^4$

$=(x^{\frac{1}{4}})^4+(x^{\frac{1}{4}})^2(y^{\frac{1}{4}})^2+(y^{\frac{1}{4}})^4$

$=x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$ 답 $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$

12

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=3$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^3=3^3$

$(x^{\frac{1}{2}})^3-3x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})-(x^{-\frac{1}{2}})^3=27$

$x^{\frac{3}{2}}-3\times1\times3-x^{-\frac{3}{2}}=27$

$\therefore x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}=36$ 답 36

13

$$\frac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+a}$$
$$=\frac{2}{1-a^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+a}$$
$$=\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1+a}=\frac{8}{1-a^2}$$
$$=\frac{8}{1-(\sqrt{3})^2}=\frac{8}{-2}$$
$$=-4$$ 답 ④

14

주어진 식의 분모, 분자에 각각 3^x을 곱하면

$$\frac{3^x+3^{3x}+3^{5x}}{3^{-x}+3^{-3x}+3^{-5x}}=\frac{(3^x+3^{3x}+3^{5x})3^x}{(3^{-x}+3^{-3x}+3^{-5x})3^x}$$

$$=\frac{3^{2x}+3^{4x}+3^{6x}}{1+3^{-2x}+3^{-4x}}$$

$$=\frac{3^{2x}+(3^{2x})^2+(3^{2x})^3}{1+(3^{2x})^{-1}+(3^{2x})^{-2}}$$

$$=\frac{2+2^2+2^3}{1+2^{-1}+2^{-2}}$$

$$=\frac{2+4+8}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{14}{\frac{7}{4}}=8$$ 답 ④

15

$18^x=3$에서 $3^{\frac{1}{x}}=18$ …… ㉠

$54^y=27$, 즉 $54^y=3^3$에서 $3^{\frac{3}{y}}=54$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$3^{\frac{1}{x}}\div 3^{\frac{3}{y}}=\frac{1}{3}$, $3^{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}=3^{-1}$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=-1$ 답 ②

16

현재 신입생 수를 P라 하면

5년 후의 신입생 수는

$(1-0.02)^5P=0.98^5P$

10년 후의 신입생 수는

$(1-0.02)^{10}P=0.98^{10}P$

5년 후의 신입생 수가 10년 후의 신입생 수의 x배라 하면

$x=\frac{0.98^5P}{0.98^{10}P}=0.98^{-5}$ 답 ④

02 로그

교과서 유형 흐름잡기

› 본문 13~15쪽

유형 1 ①	1-1 ⑤	1-2 2
유형 2 ④	2-1 ②	2-2 2
유형 3 ④	3-1 ③	3-2 ③
유형 4 ②	4-1 ③	4-2 ①
유형 5 ①	5-1 ③	5-2 0.026
유형 6 ④	6-1 100배	6-2 −1.45등급

유형 1

$\log_2\frac{1}{32}=x$에서 $2^x=\frac{1}{32}=2^{-5}$이므로 $x=-5$

$\log_9 y=0.5$에서 $y=9^{0.5}=(3^2)^{0.5}=3^1=3$

$\therefore x+y=-5+3=-2$ 답 ①

1-1

$\log_{\sqrt{3}}9=x$에서 $(\sqrt{3})^x=9$이므로

$3^{\frac{x}{2}}=3^2$, $\frac{x}{2}=2$ $\therefore x=4$

$\log_{27}y=\frac{4}{3}$에서 $y=27^{\frac{4}{3}}=(3^3)^{\frac{4}{3}}=3^4=81$

$\therefore x+y=4+81=85$ 답 ⑤

1-2

$\log_2(\log_4 x)=-1$에서 $\log_4 x=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\log_4 x=\frac{1}{2}$에서 $x=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$ 답 2

유형 2

$\log_3\sqrt{27}-\log_3\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_3 48$

$=\log_3 3\sqrt{3}-\log_3 4^{-1}-\log_3\sqrt{48}$

$=\log_3 3\sqrt{3}+\log_3 4-\log_3 4\sqrt{3}$

$=\log_3\frac{3\sqrt{3}\times 4}{4\sqrt{3}}=\log_3 3=1$ 답 ④

2-1

$\frac{1}{2}\log_3 16+\log_3\sqrt{5}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{240}$

$=\frac{1}{2}\log_3 16+\log_3 5^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\log_3 240^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{2}\log_3 16+\frac{1}{2}\log_3 5-\frac{1}{2}\log_3 240$

$=\frac{1}{2}(\log_3 16+\log_3 5-\log_3 240)$

$=\frac{1}{2}\log_3\frac{16\times 5}{240}=\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{2}\log_3 3^{-1}=-\frac{1}{2}$ 답 ②

2-2

$$\log_{10} 5+\frac{1}{2}\log_{10} 11+\log_{10} 4+\frac{1}{2}\log_{10}\frac{25}{11}$$
$$=\log_{10} 5+\log_{10} 11^{\frac{1}{2}}+\log_{10} 4+\log_{10}\left(\frac{25}{11}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\log_{10} 5+\log_{10}\sqrt{11}+\log_{10} 4+\log_{10}\sqrt{\frac{25}{11}}$$
$$=\log_{10}\left(5\times\sqrt{11}\times 4\times\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{11}}\right)$$
$$=\log_{10} 100=\log_{10} 10^2$$
$$=2$$

답 2

유형 3

$$\log_{10}\sqrt{15}=\log_{10} 15^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_{10}(3\times 5)$$
$$=\frac{1}{2}(\log_{10} 3+\log_{10} 5)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\log_{10} 3+\log_{10}\frac{10}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\log_{10} 3+1-\log_{10} 2)$$
$$=\frac{1}{2}(1-a+b)$$

답 ④

3-1

$$\log_3\frac{2}{15}=\log_3 2-\log_3 15$$
$$=\log_3 2-\log_3(3\times 5)$$
$$=\log_3 2-(\log_3 3+\log_3 5)$$
$$=\log_3 2-1-\log_3 5$$
$$=a-b-1$$

답 ③

3-2

$$\log_3 6=\log_3(2\times 3)=\log_3 2+\log_3 3$$
$$=\log_3 2+1$$

즉, $\log_3 2+1=a$이므로

$$\log_3 2=a-1$$
$$\therefore \log_3 72=\log_3(2^3\times 3^2)$$
$$=3\log_3 2+2\log_3 3$$
$$=3(a-1)+2$$
$$=3a-1$$

답 ③

유형 4

주어진 식을 밑이 3인 로그로 변형하면

$$\log_{10} 150=\frac{\log_3 150}{\log_3 10}=\frac{\log_3(2\times 3\times 5^2)}{\log_3(2\times 5)}$$
$$=\frac{\log_3 2+\log_3 3+2\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 5}$$
$$=\frac{a+2b+1}{a+b}$$

답 ②

4-1

주어진 식을 밑이 10인 로그로 변형하면

$$\log_5\sqrt{12}=\frac{\log_{10}\sqrt{12}}{\log_{10} 5}=\frac{\log_{10}(2^2\times 3)^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}\frac{10}{2}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(2\log_{10} 2+\log_{10} 3)}{\log_{10} 10-\log_{10} 2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(2a+b)}{1-a}=\frac{2a+b}{2(1-a)}$$

답 ③

4-2

$\log_a 2=3$에서 $\log_2 a=\frac{1}{3}$

$\log_b 4=-1$에서 $\log_4 b=-1$ $\quad\therefore \log_2 b=-2$

주어진 식을 밑이 2인 로그로 변형하면

$$\log_b a=\frac{\log_2 a}{\log_2 b}=\frac{\frac{1}{3}}{-2}=-\frac{1}{6}$$

답 ①

유형 5

$$\log\sqrt{375}=\log 375^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log 375$$
$$=\frac{1}{2}\log(3.75\times 10^2)$$
$$=\frac{1}{2}(\log 3.75+2)$$

이때 상용로그표에서 $\log 3.75=0.5740$이므로

$$\frac{1}{2}(\log 3.75+2)=\frac{1}{2}(0.5740+2)$$
$$=1.2870$$

답 ①

5-1

$$\log 0.036^3=3\log 0.036$$
$$=3\log(3.6\times 10^{-2})$$
$$=3(\log 3.6+\log 10^{-2})$$

이때 상용로그표에서 $\log 3.6=0.5563$이므로

$$3(\log 3.6+\log 10^{-2})=3(0.5563-2)$$
$$=-4.3311$$

답 ③

5-2

$\log 26=\log(2.6\times 10)=1.4150$에서

$\log 2.6+1=1.4150$

$\therefore \log 2.6=0.4150$

한편, $-1.5850=-2+0.4150$이므로

$\log x=\log(2.6\times 10^{-2})=\log 0.026$

$\therefore x=0.026$

답 0.026

유형 6

A 지점에서의 소리의 강도를 P_1이라 하면 소리의 크기가 30 dB이므로

$30=10\log\frac{P_1}{P_0}$ $\therefore 3=\log P_1-\log P_0$ …… ㉠

B 지점에서의 소리의 강도를 P_2라 하면 소리의 크기가 40 dB이므로

$40=10\log\frac{P_2}{P_0}$ $\therefore 4=\log P_2-\log P_0$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$1=\log P_2-\log P_1$

$1=\log\frac{P_2}{P_1}$ $\therefore \frac{P_2}{P_1}=10$

따라서 $P_2=10P_1$이므로 B 지점에서의 소리의 강도는 A 지점에서의 소리의 강도의 10배이다. 답 ④

6-1

pH 5인 용액의 수소 이온 농도를 A, pH 7인 용액의 수소 이온 농도를 B라 하면

$5=-\log A$ …… ㉠

$7=-\log B$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$2=-\log B-(-\log A)=\log\frac{A}{B}$

$\therefore \frac{A}{B}=10^2=100$

따라서 $A=100B$이므로 pH 5인 용액의 수소 이온 농도는 pH 7인 용액의 수소 이온 농도의 100배이다. 답 100배

6-2

북극성의 밝기를 I_1, 시리우스의 밝기를 I_2라 하면 시리우스의 밝기는 북극성의 밝기의 24배이므로

$I_2=24I_1$ …… ㉠

한편, 밝기가 I_1인 북극성의 등급은 2등급이므로

$2=-\frac{5}{2}\log I_1+C$ …… ㉡

이때 밝기가 I_2인 시리우스의 등급을 m등급이라 하면

$m=-\frac{5}{2}\log I_2+C$

$=-\frac{5}{2}\log 24I_1+C$ ($\because$ ㉠)

$=-\frac{5}{2}\log(2^3\times3\times I_1)+C$

$=-\frac{5}{2}(3\log 2+\log 3)+\left(-\frac{5}{2}\log I_1+C\right)$

$=-\frac{5}{2}(3\times0.30+0.48)+2$ ($\because$ ㉡)

$=-1.45$

따라서 시리우스의 등급은 −1.45등급이다. 답 −1.45등급

교과서 문제 정복하기

› 본문 16~17쪽

01 ②	02 ②	03 ②	04 ②	05 ③
06 ③	07 ③	08 ②	09 ③	10 ④
11 ①	12 0	13 ⑤	14 6	15 ②
16 1.78배				

01

$\log_5(\log_{32}x)=-1$에서 $\log_{32}x=5^{-1}=\frac{1}{5}$

$\therefore x=32^{\frac{1}{5}}=(2^5)^{\frac{1}{5}}=2$ 답 ②

02

$x=\log_5 27$에서 $5^x=27$

$\therefore 5^{\frac{x}{3}}=(5^x)^{\frac{1}{3}}=27^{\frac{1}{3}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}=3$ 답 ②

03

$\log_{\sqrt{3}}a=2$에서 $a=(\sqrt{3})^2=3$

$\log_{\frac{1}{8}}4=b$에서 $4=\left(\frac{1}{8}\right)^b$

$2^{-3b}=2^2$, $-3b=2$ $\therefore b=-\frac{2}{3}$

$\therefore ab=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$ 답 ②

다른풀이

$\log_{\sqrt{3}}a=2$에서 $a=(\sqrt{3})^2=3$

$\log_{\frac{1}{8}}4=b$에서 $b=\log_{\frac{1}{8}}4=\log_{2^{-3}}2^2=-\frac{2}{3}$

$\therefore ab=3\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-2$

04

(i) (밑)>0, (밑)≠1이어야 하므로

$x>0$, $x\neq1$ …… ㉠

(ii) (진수)>0이어야 하므로

$-x^2+2x+8>0$, $x^2-2x-8<0$

$(x+2)(x-4)<0$ $\therefore -2<x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$0<x<1$ 또는 $1<x<4$

따라서 구하는 정수 x는 2, 3의 2개이다. 답 ②

05

$2\log_2\sqrt{27}+\frac{1}{2}\log_2\sqrt{2}+3\log_2\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$

$=2\log_2 27^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\log_2 2^{\frac{1}{2}}+3\log_2\frac{2^{\frac{1}{3}}}{3}$

$=\log_2 27+\frac{1}{4}\log_2 2+3\left(\frac{1}{3}\log_2 2-\log_2 3\right)$

$=\log_2 27+\frac{1}{4}+1-3\log_2 3$

$=3\log_2 3+\frac{5}{4}-3\log_2 3=\frac{5}{4}$ 답 ③

06

$(\log_{18} 2)^2+(2\log_{18} 3)^2+\log_{18} 4\times\log_{18} 9$

$=(\log_{18} 2)^2+(2\log_{18} 3)^2+\log_{18} 2^2\times\log_{18} 3^2$

$=(\log_{18} 2)^2+(2\log_{18} 3)^2+2\times\log_{18} 2\times 2\log_{18} 3$

$=(\log_{18} 2+2\log_{18} 3)^2$

$=\{\log_{18}(2\times 3^2)\}^2$

$=(\log_{18} 18)^2=1^2=1$ 답 ③

07

$\log_3 2.5+\log_3 20=\log_3(2.5\times 20)=\log_3 50$

$=\log_3(2\times 5^2)=\log_3 2+2\log_3 5$

$=a+2b$ 답 ③

08

$\log_{10}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_{10}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log_{10}\left(1-\frac{1}{4}\right)$

$+\cdots+\log_{10}\left(1-\frac{1}{10}\right)$

$=\log_{10}\frac{1}{2}+\log_{10}\frac{2}{3}+\log_{10}\frac{3}{4}+\cdots+\log_{10}\frac{9}{10}$

$=\log_{10}\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{9}{10}\right)$

$=\log_{10}\frac{1}{10}$

$=\log_{10} 10^{-1}=-1$ 답 ②

09

$(\log_3 2+\log_{27} 8)(\log_8 3+\log_2 27)$

$=(\log_3 2+\log_{3^3} 2^3)(\log_{2^3} 3+\log_2 3^3)$

$=(\log_3 2+\log_3 2)\left(\frac{1}{3}\log_2 3+3\log_2 3\right)$

$=2\log_3 2\times\frac{10}{3}\log_2 3$

$=\frac{20}{3}\times\log_3 2\times\log_2 3=\frac{20}{3}$ 답 ③

10

$\log_5 2+3\log_5 3=\log_5(2\times 3^3)=\log_5 54$이므로

$\log_5 1+5^{\log_5 2+3\log_5 3}=0+5^{\log_5 54}$

$=54^{\log_5 5}=54$ 답 ④

11

$\log_6 6=\log_6(2\times 3)=\log_6 2+\log_6 3$이므로

$1=a+\log_6 3$ $\therefore \log_6 3=1-a$

$\therefore \log_9 6=\frac{\log_6 6}{\log_6 9}=\frac{1}{\log_6 3^2}$

$=\frac{1}{2\log_6 3}=\frac{1}{2(1-a)}$ 답 ①

12

$\frac{\log_{10} 4}{a}=\log_{10} 6$에서 $a=\frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 6}=\log_6 4$

$\frac{\log_{10} 9}{b}=\log_{10} 6$에서 $b=\frac{\log_{10} 9}{\log_{10} 6}=\log_6 9$

$\frac{\log_{10} 36}{c}=\log_{10} 6$에서 $c=\frac{\log_{10} 36}{\log_{10} 6}=\log_6 36$

$\therefore a+b-c=\log_6 4+\log_6 9-\log_6 36$

$=\log_6\frac{4\times 9}{36}=\log_6 1=0$ 답 0

13

$2^a=3$, $2^b=7$에서 $a=\log_2 3$, $b=\log_2 7$

$\log_{56} 63$을 밑이 2인 로그로 변형하면

$\log_{56} 63=\frac{\log_2 63}{\log_2 56}=\frac{\log_2(3^2\times 7)}{\log_2(2^3\times 7)}$

$=\frac{2\log_2 3+\log_2 7}{3\log_2 2+\log_2 7}=\frac{2a+b}{3+b}$ 답 ⑤

14

이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근이 $\log_5\alpha$, $\log_5\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_5\alpha+\log_5\beta=4$, $\log_5\alpha\times\log_5\beta=2$ …… ㉠

주어진 식을 밑이 5인 로그로 변형하면

$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\frac{\log_5\beta}{\log_5\alpha}+\frac{\log_5\alpha}{\log_5\beta}$

$=\frac{(\log_5\beta)^2+(\log_5\alpha)^2}{\log_5\alpha\times\log_5\beta}$

$=\frac{(\log_5\alpha+\log_5\beta)^2-2\times\log_5\alpha\times\log_5\beta}{\log_5\alpha\times\log_5\beta}$

$=\frac{4^2-2\times 2}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=6$ 답 6

15

$\log x=n+\alpha$ (n은 정수, $0\le\alpha<1$) 꼴로 바꾸면

$\log a=3+0.3118$

$=\log 10^3+\log 2.05$

$=\log(10^3\times 2.05)$

$=\log 2050$

이므로 $a=2050$

$\log b=-0.6882$

$=-1+0.3118$

$=\log 10^{-1}+\log 2.05$

$=\log(10^{-1}\times 2.05)$

$=\log 0.205$

이므로 $b=0.205$

$\therefore a+b=2050.205$ 답 ②

16

현재 매출량을 a라 하면 10년 후의 매출량은

$a(1+0.06)^{10}=a\times1.06^{10}$

$x=1.06^{10}$이라 하고 양변에 상용로그를 취하면

$\log x=10\log1.06$

$\quad=10\times0.025=0.25$

이때 $\log1.78=0.250$이므로

$x=1.78$

따라서 10년 후 매출량은 현재 매출량의 1.78배가 된다.

답 1.78배

03 지수함수

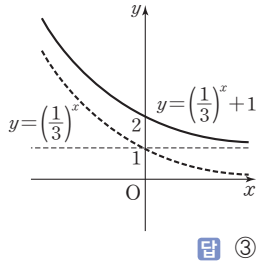
교과서 유형 흐름잡기

본문 19~21쪽

유형 1	③	1-1 ③	1-2 ④
유형 2	①	2-1 ④	2-2 $B<A<C$
유형 3	②	3-1 ④	3-2 ④
유형 4	②	4-1 $x=-2$	4-2 8
유형 5	③	5-1 ⑤	5-2 0
유형 6	⑤	6-1 ②	6-2 ②

유형 1

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

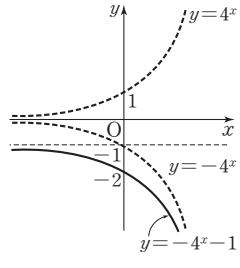


따라서 점근선의 방정식은 $y=1$이고, 치역은 $\{y|y>1\}$이다.

답 ③

1-1

$y=-4^x-1$의 그래프는 $y=4^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

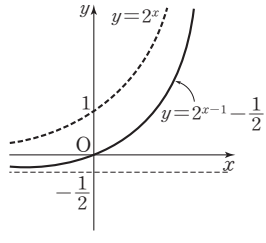


따라서 점근선의 방정식은 $y=-1$이고, 치역은 $\{y|y<-1\}$이다.

답 ③

1-2

ㄱ. $y=2^{x-1}-\frac{1}{2}$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. (거짓)



따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

유형 2

$A=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$, $B=\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$, $C=\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{2}$에서 $2^{\frac{1}{2}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{2}}$

$\therefore A<B<C$

답 ①

2-1

$A=\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$, $B=\frac{1}{25}=\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$, $C=\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^{3}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

이때 밑 $\frac{1}{5}$이 $0<\frac{1}{5}<1$이므로

$-0.2<\frac{3}{2}<2$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.2}$

$\therefore B<C<A$ 답 ④

2-2

$A=\sqrt[3]{0.2}=(0.2)^{\frac{1}{3}}$

$B=\sqrt[4]{0.04}=\sqrt[4]{(0.2)^{2}}=(0.2)^{\frac{1}{2}}$

$C=\sqrt[12]{0.008}=\sqrt[12]{(0.2)^{3}}=(0.2)^{\frac{1}{4}}$

이때 밑 0.2가 $0<0.2<1$이므로

$\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$에서 $(0.2)^{\frac{1}{2}}<(0.2)^{\frac{1}{3}}<(0.2)^{\frac{1}{4}}$

$\therefore B<A<C$ 답 $B<A<C$

유형 3

함수 $y=2^{x}-3$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $-1\le x\le 2$일 때

$x=2$에서 최댓값 $2^{2}-3=1$,

$x=-1$에서 최솟값 $2^{-1}-3=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$1+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{2}$ 답 ②

3-1

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-1$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $-3\le x\le -1$일 때

$x=-3$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}-1=64-1=63$,

$x=-1$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}-1=4-1=3$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$63+3=66$ 답 ④

3-2

$y=(2^{x})^{2}\times 9^{-x}=(2^{2})^{x}\times(3^{-2})^{x}=\left(\frac{4}{9}\right)^{x}$

함수 $y=\left(\frac{4}{9}\right)^{x}$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $-2\le x\le 1$일 때

$x=-2$에서 최댓값 $M=\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}=\frac{81}{16}$,

$x=1$에서 최솟값 $m=\frac{4}{9}$를 갖는다.

$\therefore Mm=\frac{81}{16}\times\frac{4}{9}=\frac{9}{4}$ 답 ④

유형 4

$9^{-x}=81\times 3^{x}$에서 $3^{-2x}=3^{4+x}$이므로

$-2x=4+x$, $3x=-4$

$\therefore x=-\frac{4}{3}$ 답 ②

4-1

$2^{2x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$에서 $2^{2x+1}=2^{x-1}$이므로

$2x+1=x-1$ $\therefore x=-2$ 답 $x=-2$

4-2

$(\sqrt{2})^{x^{2}}=4^{x+3}$에서 $2^{\frac{1}{2}x^{2}}=2^{2x+6}$이므로

$\frac{1}{2}x^{2}=2x+6$, $x^{2}-4x-12=0$

$(x+2)(x-6)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

따라서 $\alpha=6$, $\beta=-2$이므로

$\alpha-\beta=8$ 답 8

유형 5

$2^{x-3}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2}$에서 $2^{x-3}\ge 2^{-3x-2}$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$x-3\ge -3x-2$, $4x\ge 1$ $\therefore x\ge\frac{1}{4}$

따라서 구하는 정수 x의 최솟값은 1이다. 답 ③

5-1

$5^{2x-1}>\left(\frac{1}{5}\right)^{4-3x}$에서 $5^{2x-1}>5^{3x-4}$

이때 밑 5가 $5>1$이므로

$2x-1>3x-4$ $\therefore x<3$

따라서 구하는 정수 x의 최댓값은 2이다. 답 ⑤

5-2

$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{9}\right)^{x^{2}}<\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-2}$에서 밑 $\frac{1}{9}$이 $0<\frac{1}{9}<1$이므로

$x+2>x^{2}>3x-2$

(i) $x+2>x^{2}$에서 $x^{2}-x-2<0$

$(x+1)(x-2)<0$ $\therefore -1<x<2$

(ii) $x^{2}>3x-2$에서 $x^{2}-3x+2>0$

$(x-1)(x-2)>0$ $\therefore x<1$ 또는 $x>2$

(i), (ii)에서 $-1<x<1$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=1$이므로

$\alpha+\beta=0$ 답 0

유형 6

x시간이 경과한 후 세균의 수는

2×2^x(마리)

x시간 후 세균의 수가 128마리 이상이므로

$2\times 2^x \geq 128$, $2^{x+1} \geq 2^7$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $x+1 \geq 7$ $\therefore x \geq 6$

따라서 최소 6시간이 경과한 것이다. 답 ⑤

6-1

x시간이 경과한 후 박테리아의 개체 수는

$625\times(1+0.2)^x$(마리)

x시간 후 박테리아의 개체 수가 1296마리 이상이므로

$625\times(1.2)^x \geq 1296$, $5^4\times\left(\frac{6}{5}\right)^x \geq 6^4$, $\left(\frac{6}{5}\right)^x \geq \left(\frac{6}{5}\right)^4$

이때 밑 $\frac{6}{5}$이 $\frac{6}{5}>1$이므로 $x \geq 4$

따라서 박테리아의 개체 수가 처음으로 1296마리 이상이 되는 것은 오전 9시부터 4시간이 경과한 후인 오후 1시 이후이다.

답 ②

6-2

농약을 살포하기 전의 해충의 수를 a라 하면 농약을 살포한 후 x시간 후의 해충의 수는

$a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}$(마리)

이때 처음 해충의 수의 $\frac{1}{16}$이 되려면

$a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}=\frac{1}{16}a$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{4}}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

즉, $\frac{x}{4}=4$이므로 $x=16$

따라서 해충의 수가 처음 해충의 수의 $\frac{1}{16}$이 되기까지 16시간이 걸린다. 답 ②

교과서 문제 정복하기

› 본문 22~23쪽

01 ②	02 ③	03 ㄱ, ㄹ	04 1	05 1
06 ②	07 ⑤	08 ③	09 ②	
10 $x=3$	11 ②	12 ②	13 ①	14 2
15 ③	16 3번			

01

ㄴ. 다항함수이다.

ㄷ. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{16}\right)^x$이므로 지수함수이다.

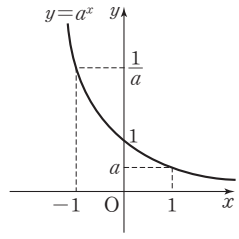
ㄹ. 밑이 $-1<0$이므로 지수함수가 아니다.

따라서 지수함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ②

02

$0<a<1$일 때, 함수 $y=a^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

③ 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.



답 ③

03

ㄱ. $y=3^x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=3^x-1$의 그래프와 겹쳐진다.

ㄹ. $y=\frac{1}{3^x}-1=3^{-x}-1$이므로 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=\frac{1}{3^x}-1$의 그래프와 겹쳐진다.

따라서 $y=3^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

04

$y=9\times 3^x-3=3^{x+2}-3$이므로 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=-2$, $n=-3$이므로

$m-n=1$ 답 1

05

$y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=n$이므로 $n=-2$

또, 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=3^{-m}-2$, $3^{-m}=3$

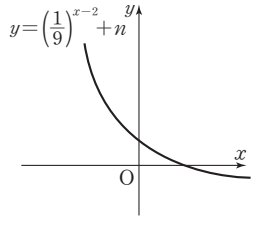
$-m=1$ $\therefore m=-1$

$\therefore m-n=1$ 답 1

06

$y=\left(\frac{1}{9}\right)^{x-2}+n$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

이 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 y절편이 0보다 크거나 같아야 하므로



$\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}+n \geq 0$ $\therefore n \geq -81$

따라서 정수 n의 최솟값은 -81이다. 답 ②

07

$A=\sqrt[n]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n}}=a^{1+\frac{1}{n}}$

$B=\sqrt[n+1]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+1}}=a^{1+\frac{1}{n+1}}$

$C=\sqrt[n+2]{a^{n+3}}=a^{\frac{n+3}{n+2}}=a^{1+\frac{1}{n+2}}$

이때 밑 a가 $a>1$이므로

$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$, 즉 $1+\frac{1}{n+2}<1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{n}$에서

$a^{1+\frac{1}{n+2}}<a^{1+\frac{1}{n+1}}<a^{1+\frac{1}{n}}$

$\therefore C<B<A$ 답 ⑤

08

$y=2^{1-x}\times 3^{x-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$

함수 $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1}$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $-3\le x\le 1$일 때

$x=1$에서 최댓값 $M=\left(\frac{3}{2}\right)^{1-1}=1$,

$x=-3$에서 최솟값 $m=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3-1}=\frac{16}{81}$을 갖는다.

$\therefore Mm=1\times\frac{16}{81}=\frac{16}{81}$ 답 ③

09

$y=3^{x^2-6x+7}$에서 $x^2-6x+7=t$라 하면

$t=(x-3)^2-2\ge -2$

이때 주어진 함수는 $y=3^t$이고 밑 3이 $3>1$이므로

$t=-2$일 때 최솟값 $3^{-2}=\frac{1}{9}$을 갖는다. 답 ②

참고 $t\ge -2$에서 정의된 함수 $y=3^t$은 t의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 $t=-2$일 때 최솟값을 갖는다.

10

$2^{2x}-2^{x+2}-32=0$에서 $(2^x)^2-4\times 2^x-32=0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-4t-32=0$, $(t+4)(t-8)=0$

$\therefore t=8$ $(\because t>0)$

즉, $2^x=8=2^3$이므로 $x=3$ 답 $x=3$

참고 $2^x=t$로 치환할 때, 항상 $t>0$임에 주의한다.

11

$3^{2x}-4\times 3^{x+1}+27=0$에서 $(3^x)^2-12\times 3^x+27=0$

$3^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-12t+27=0$, $(t-3)(t-9)=0$

$\therefore t=3$ 또는 $t=9$

즉, $3^x=3$ 또는 $3^x=9=3^2$이므로

$x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore \alpha+\beta=1+2=3$ 답 ②

12

$\sqrt{2}<2^{2x}<64$에서 $2^{\frac{1}{2}}<2^{2x}<2^6$

밑 2가 $2>1$이므로 $\frac{1}{2}<2x<6$ $\therefore \frac{1}{4}<x<3$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 1, 2의 2개이다. 답 ②

13

$2^{2x}\ge 6\times 2^x+16$에서 $(2^x)^2-6\times 2^x-16\ge 0$

$2^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-6t-16\ge 0$, $(t+2)(t-8)\ge 0$

$\therefore t\ge 8$ $(\because t>0)$

즉, $2^x\ge 2^3$이고 밑 2가 $2>1$이므로

$x\ge 3$

따라서 실수 x의 값이 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

14

$\left(\frac{1}{9}\right)^x-10\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+81<0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-30\times\left(\frac{1}{3}\right)^x+81<0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$t^2-30t+81<0$, $(t-3)(t-27)<0$

$\therefore 3<t<27$

즉, $3<\left(\frac{1}{3}\right)^x<27$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$이고

밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $-3<x<-1$

따라서 $\alpha=-3$, $\beta=-1$이므로

$\beta-\alpha=2$ 답 2

15

반감기가 n번 지난 후 남아 있는 방사성 물질 A의 양은

$1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$이므로 $1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=64$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{64}{1024}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$ $\therefore n=4$

따라서 구하는 기간은 반감기가 4번 지나므로 48일이다.

답 ③

16

정수하기 전의 불순물의 양을 a $(a>0)$라 하면 정수 필터를 n번 통과한 후의 불순물의 양은

$a\times\left(\frac{1}{8}\right)^n=a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}$

이때 $\frac{1}{512}=\left(\frac{1}{2}\right)^9$이므로

$a\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\le a\times\left(\frac{1}{2}\right)^9$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\le\left(\frac{1}{2}\right)^9$ $(\because a>0)$

밑 $\frac{1}{2}$이 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 $3n\ge 9$ $\therefore n\ge 3$

따라서 최소 3번의 정수 작업을 해야 한다. 답 3번

04 로그함수

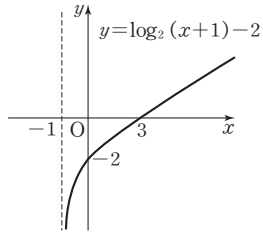
교과서 유형 흐름잡기

본문 25~27쪽

유형 1 ③	1-1 ⑤	1-2 ③
유형 2 ②	2-1 ⑤	2-2 $\log_5 2$
유형 3 ②	3-1 ④	3-2 8
유형 4 ②	4-1 $x=8$	4-2 ②
유형 5 ④	5-1 4	5-2 ④
유형 6 ③	6-1 $\frac{1}{5}$배	6-2 ④

유형 1

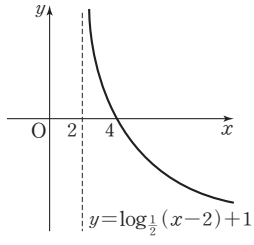
$y=\log_2(x+1)-2$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 점근선의 방정식은 $x=-1$이고, 정의역은 $\{x|x>-1\}$이다. 답 ③

1-1

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+1$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



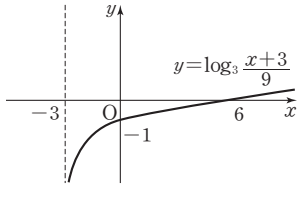
따라서 점근선의 방정식은 $x=2$이고, 정의역은 $\{x|x>2\}$이다. 답 ⑤

1-2

$y=\log_3\frac{x+3}{9}=\log_3(x+3)-\log_3 9$

$=\log_3(x+3)-2$

ㄱ. $y=\log_3\frac{x+3}{9}$의 그래프는 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다. (참)



ㄴ. 정의역은 $\{x|x>-3\}$이다. (참)

ㄷ. 점근선의 방정식은 $x=-3$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

유형 2

$A=\log_4 81=\log_{2^2} 9^2=\log_2 9$

$B=\log_2 12$

$C=\log_{\frac{1}{2}} 0.1=\log_{2^{-1}} 10^{-1}=\log_2 10$

이때 밑 2가 $2>1$이고 진수가 $9<10<12$이므로

$\log_2 9<\log_2 10<\log_2 12$

$\therefore A<C<B$ 답 ②

2-1

$A=-2\log_2\frac{1}{7}=\log_2 7^2=\log_2 49$

$B=3+\log_2 5=\log_2 2^3+\log_2 5=\log_2 40$

$C=2+2\log_2 3=\log_2 2^2+\log_2 3^2=\log_2 36$

이때 밑 2가 $2>1$이고 진수가 $36<40<49$이므로

$\log_2 36<\log_2 40<\log_2 49$

$\therefore C<B<A$ 답 ⑤

2-2

$\log_{\frac{1}{5}}\frac{2}{3}=-\log_5\frac{2}{3}=\log_5\frac{3}{2}$

이때 밑 5가 $5>1$이고 진수가 $\frac{2}{3}<\frac{3}{2}<3$이므로

$\log_5\frac{2}{3}<\log_5\frac{3}{2}<\log_5 3$

따라서 가장 큰 값은 $\log_5 3$, 가장 작은 값은 $\log_5\frac{2}{3}$이므로 구하는 합은

$\log_5 3+\log_5\frac{2}{3}=\log_5\left(3\times\frac{2}{3}\right)=\log_5 2$ 답 $\log_5 2$

유형 3

$y=-\log_4(x+1)=\log_{\frac{1}{4}}(x+1)$이므로 함수 $y=-\log_4(x+1)$은 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉, $15\le x\le 255$일 때

$x=15$에서 최댓값 $-\log_4 16=-\log_4 4^2=-2$,

$x=255$에서 최솟값 $-\log_4 256=-\log_4 4^4=-4$를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$-2+(-4)=-6$ 답 ②

3-1

$y=\log_{\frac{1}{2}} 5x-2$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

즉, $\frac{2}{5}\le x\le\frac{8}{5}$일 때

$x=\frac{2}{5}$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}\left(5\times\frac{2}{5}\right)-2=\log_{\frac{1}{2}} 2-2=-3$,

$x=\frac{8}{5}$에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}\left(5\times\frac{8}{5}\right)-2=\log_{\frac{1}{2}} 8-2=-5$를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$-3+(-5)=-8$ 답 ④

3-2

$y=-\log_{\frac{1}{5}}(x-2)+1=\log_5(x-2)+1$이므로 함수 $y=-\log_{\frac{1}{5}}(x-2)+1$은 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. 즉, $7\le x\le 127$일 때

$x=127$에서 최댓값 $M=-\log_{\frac{1}{5}}125+1=4$,

$x=7$에서 최솟값 $m=-\log_{\frac{1}{5}}5+1=2$를 갖는다.

$\therefore Mm=4\times 2=8$ 답 8

유형 4

진수의 조건에서

$3x+7>0,\ x+1>0 \quad \therefore x>-1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{3}}(3x+7)-2\log_{\frac{1}{3}}(x+1)=0$에서

$\log_{\frac{1}{3}}(3x+7)=2\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

$\log_{\frac{1}{3}}(3x+7)=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2$

즉, $3x+7=(x+1)^2$이므로

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

이때 ㉠에 의하여 $x=3$ 답 ②

4-1

진수의 조건에서

$x+8>0,\ x-4>0 \quad \therefore x>4$ …… ㉠

$\log_9(x+8)=\log_3(x-4)$에서

$\frac{1}{2}\log_3(x+8)=\log_3(x-4)$

$\log_3(x+8)=2\log_3(x-4)$

$\log_3(x+8)=\log_3(x-4)^2$

즉, $x+8=(x-4)^2$이므로

$x^2-9x+8=0,\ (x-1)(x-8)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=8$

이때 ㉠에 의하여 $x=8$ 답 $x=8$

4-2

진수의 조건에서

$2x+5>0,\ 2-x>0 \quad \therefore -\frac{5}{2}<x<2$ …… ㉠

$\log(2x+5)+\log(2-x)=1$에서

$\log(2x+5)(2-x)=\log 10$

$\log(-2x^2-x+10)=\log 10$

즉, $-2x^2-x+10=10$이므로

$2x^2+x=0,\ x(2x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=0$

$x=-\frac{1}{2}$, $x=0$은 ㉠을 만족시키므로 구하는 근이다.

따라서 모든 근의 합은

$-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$ 답 ②

유형 5

진수의 조건에서

$x+1>0,\ 2x+10>0 \quad \therefore x>-1$ …… ㉠

$\log_2(x+1)\ge\log_4(2x+10)$에서

$\log_2(x+1)\ge\frac{1}{2}\log_2(2x+10)$

$2\log_2(x+1)\ge\log_2(2x+10)$

$\log_2(x+1)^2\ge\log_2(2x+10)$

밑 2가 $2>1$이므로 $(x+1)^2\ge 2x+10$

$x^2-9\ge 0,\ (x+3)(x-3)\ge 0$

$\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$x\ge 3$

따라서 구하는 정수 x의 최솟값은 3이다. 답 ④

5-1

진수의 조건에서

$12-2x>0,\ x-3>0 \quad \therefore 3<x<6$ …… ㉠

$\log_5(12-2x)+\log_{\frac{1}{5}}(x-3)>0$에서

$\log_5(12-2x)-\log_5(x-3)>0$

$\log_5(12-2x)>\log_5(x-3)$

이때 밑 5가 $5>1$이므로 $12-2x>x-3$

$3x<15 \quad \therefore x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$3<x<5$

따라서 구하는 정수 x는 4이다. 답 4

5-2

진수의 조건에서

$x^2+4x-5>0,\ x+1>0$

(i) $x^2+4x-5>0$에서 $(x+5)(x-1)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>1$

(ii) $x+1>0$에서 $x>-1$

(i), (ii)에서 $x>1$ …… ㉠

$\log_{\frac{1}{9}}(x^2+4x-5)>\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$에서

$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x-5)>\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x-5)>2\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x-5)>\log_{\frac{1}{3}}(x+1)^2$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $x^2+4x-5<x^2+2x+1$

$2x<6 \quad \therefore x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$1<x<3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로

$\alpha+\beta=4$ 답 ④

유형 6

온도가 100 °C인 물체를 온도가 20 °C인 실내에 10분 동안 놓았으므로

$10=-10\log\frac{T-20}{100-20}$

$\log\frac{T-20}{80}=-1$, 즉 $\log\frac{T-20}{80}=\log\frac{1}{10}$이므로

$\frac{T-20}{80}=\frac{1}{10}$, $10T-200=80$ $\therefore T=28$

따라서 10분 후 물체의 온도는 28 °C이다. 답 ③

6-1

벽을 투과하기 전 전파의 세기를 A, 투과한 후 전파의 세기를 B라 하면

$-7=10\times\log\frac{B}{A}$

즉, $\log\frac{B}{A}=-\frac{7}{10}$이므로

$\frac{B}{A}=10^{-\frac{7}{10}}=10^{-1+\frac{3}{10}}=10^{-1}\times10^{\frac{3}{10}}$

$=\frac{1}{10}\times2=\frac{1}{5}$

따라서 $B=\frac{1}{5}A$이므로 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 전파의 세기의 $\frac{1}{5}$배이다. 답 $\frac{1}{5}$배

6-2

평균 점수가 n번째 시험에서 처음으로 85점 이상이 된다고 하면

$40+15\log_2 n\geq85$

$15\log_2 n\geq45$, $\log_2 n\geq3$, $\log_2 n\geq\log_2 2^3$

이때 밑 2가 $2>1$이므로

$n\geq2^3=8$

따라서 8번째 시험에서 처음으로 85점 이상이 된다. 답 ④

교과서 문제 정복하기

› 본문 28~29쪽

01 ⑤ 02 ㄱ, ㄴ, ㄹ 03 ② 04 3
05 ⑤ 06 ⑤ 07 5 08 4
09 $x=\frac{7}{3}$ 10 ③ 11 ⑤ 12 ① 13 ①
14 $\frac{1}{3}<a<3$ 15 $\frac{99}{8}$분

01

ㄱ. $f(14)=\log_3 14=\log_3(2\times7)=\log_3 2+\log_3 7$
$=f(2)+f(7)$ (참)

ㄴ. $f(6)=\log_3 6$, $3f(2)=3\log_3 2=\log_3 2^3=\log_3 8$
이므로 $f(6)\neq3f(2)$ (거짓)

ㄷ. $f(\sqrt{5})=\log_3\sqrt{5}=\log_3 5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 5=\frac{1}{2}f(5)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ⑤

02

ㄱ. $y=4^x$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y=\log_4(-x)$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y=2\log_2 x=\log_{\sqrt{2}} x$이므로 $y=2\log_2 x$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y=\frac{1}{2}\log_2 x+2=\log_{2^2} x+2=\log_4 x+2$이므로

$y=\frac{1}{2}\log_2 x+2$의 그래프는 $y=\log_4 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\log_4 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

03

② 그래프는 점 (1, 0)을 지난다. 답 ②

04

$y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_3(x-m)+n$

이 그래프의 점근선의 방정식은 $x=m$이므로 $m=2$

또, 그래프가 점 (5, 0)을 지나므로

$\log_3 3+n=0$ $\therefore n=-1$

$\therefore m-n=2-(-1)=3$ 답 3

05

직선 $y=x$ 위의 점은 x좌표와 y좌표가 같으므로

$1=\log_2 a$에서

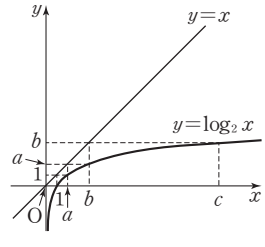
$a=2^1=2$

$a=\log_2 b$에서

$b=2^a=2^2=4$

$b=\log_2 c$에서

$c=2^b=2^4=16$



답 ⑤

06

$1<x<2$의 각 변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 1<\log_2 x<\log_2 2$ $\therefore 0<\log_2 x<1$

이때

$A-B=2\log_2 x-(\log_2 x)^2$

$=\log_2 x\times(2-\log_2 x)>0$

이므로 $A>B$

$0<\log_2 x<1$이므로

$0<(\log_2 x)^2<1$, $\log_2(\log_2 x)<0$

$\therefore (\log_2 x)^2>\log_2(\log_2 x)$

즉, $B>C$이므로

$C<B<A$ 답 ⑤

07

$f(x)=-x^2+2x+7$로 놓으면

$f(x)=-(x-1)^2+8$

$0\le x\le 3$에서 $f(0)=7$, $f(1)=8$, $f(3)=4$이므로

$4\le f(x)\le 8$

이때 주어진 함수 $y=\log_2 f(x)$에서 밑 2가 $2>1$이므로

$f(x)=8$에서 최댓값 $\log_2 8=\log_2 2^3=3$,

$f(x)=4$에서 최솟값 $\log_2 4=\log_2 2^2=2$를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$3+2=5$ 답 5

08

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$로 놓으면

$\frac{1}{8}\le x\le 1$에서 $\log_{\frac{1}{2}} 1\le\log_{\frac{1}{2}} x\le\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$

$\therefore 0\le t\le 3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

이므로

$t=0$에서 최댓값 $M=3$, $t=2$에서 최솟값 $m=-1$

을 갖는다.

$\therefore M-m=3-(-1)=4$ 답 4

09

진수의 조건에서

$5x+5>0$, $3x-1>0$ $\therefore x>\frac{1}{3}$ …… ㉠

$\frac{1}{2}\log(5x+5)+\log\sqrt{3x-1}=1$에서

$\frac{1}{2}\log(5x+5)+\frac{1}{2}\log(3x-1)=1$

$\log(5x+5)(3x-1)=2$

$\log(15x^2+10x-5)=\log 10^2$

즉, $15x^2+10x-5=100$이므로

$3x^2+2x-21=0$, $(x+3)(3x-7)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{7}{3}$

이때 ㉠에 의하여 $x=\frac{7}{3}$ 답 $x=\frac{7}{3}$

10

$(\log_2 4x)^2-3\log_2 4x^2=0$에서

$(\log_2 4+\log_2 x)^2-3(\log_2 4+\log_2 x^2)=0$

$(2+\log_2 x)^2-3(2+2\log_2 x)=0$

$4+4\log_2 x+(\log_2 x)^2-6-6\log_2 x=0$

$(\log_2 x)^2-2\log_2 x-2=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-2t-2=0$ …… ㉠

이때 주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 방정식 ㉠의 두 근은

$\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=2$, $\log_2\alpha\beta=2$

$\therefore \alpha\beta=2^2=4$ 답 ③

11

진수의 조건에서

$x-5>0$, $x-3>0$ $\therefore x>5$ …… ㉠

$\log_3(x-5)<1-\log_3(x-3)$에서

$\log_3(x-5)+\log_3(x-3)<1$

$\log_3(x-5)(x-3)<\log_3 3$

$\log_3(x^2-8x+15)<\log_3 3$

이때 밑 3이 $3>1$이므로 $x^2-8x+15<3$

$x^2-8x+12<0$, $(x-2)(x-6)<0$

$\therefore 2<x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $5<x<6$

따라서 $\alpha=5$, $\beta=6$이므로

$\alpha+\beta=11$ 답 ⑤

12

진수의 조건에서

$\log_2 x>0$, $\log_2 x>\log_2 1$ $\therefore x>1$ …… ㉠

$\log_3(\log_2 x)\le 1$에서

$\log_3(\log_2 x)\le\log_3 3$

밑 3이 $3>1$이므로

$\log_2 x\le 3$, $\log_2 x\le\log_2 2^3$

밑 2가 $2>1$이므로 $x\le 8$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $1<x\le 8$

따라서 정수 x는 2, 3, 4, …, 8의 7개이다. 답 ①

13

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+t-2<0$

$(t+2)(t-1)<0$ $\therefore -2<t<1$

즉, $-2<\log_2 x<1$이므로

$\log_2 2^{-2}<\log_2 x<\log_2 2$

이때 밑 2가 $2>1$이므로 $\frac{1}{4}<x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{4}<x<2$

따라서 구하는 정수 x의 값은 1이다. 답 ①

14

진수의 조건에서 $a>0$ …… ㉠

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1+\log_{\frac{1}{3}}a)^2-2(1+\log_{\frac{1}{3}}a)<0$

$(\log_{\frac{1}{3}}a)^2-1<0$

$\log_{\frac{1}{3}}a=t$로 놓으면 $t^2-1<0$

$(t+1)(t-1)<0$ $\therefore -1<t<1$

즉, $-1<\log_{\frac{1}{3}}a<1$이므로

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\log_{\frac{1}{3}}a<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$

이때 밑 $\frac{1}{3}$이 $0<\frac{1}{3}<1$이므로 $\frac{1}{3}<a<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3}<a<3$ 답 $\frac{1}{3}<a<3$

15

초기 온도가 20 °C인 화재 장소에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후의 온도가 365 °C이므로

$365=20+k\log\left(8\times\frac{9}{8}+1\right)$

$\therefore k=345$

또, 화재가 발생한 지 t분 후의 온도가 710 °C라 하면

$710=20+345\log(8t+1)$

$345\log(8t+1)=690$

$\log(8t+1)=2$

$8t+1=10^2=100$

$\therefore t=\frac{99}{8}$

따라서 화재가 발생한 후 온도가 710 °C가 되는 데 걸리는 시간은 $\frac{99}{8}$분이다. 답 $\frac{99}{8}$분

Ⅱ. 삼각함수

되짚어 보기

› 본문 30쪽

01 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{4}{5}$

(3) $\frac{3}{4}$

02

삼각비 \ A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

03 (1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{12}$

04 (1) 12 (2) 30

05 삼각함수

교과서 유형 흐름잡기

› 본문 33~35쪽

유형 **1** ㄴ, ㄹ **1**-1 ㄴ, ㄷ **1**-2 ③

유형 **2** ⑤ **2**-1 ③ **2**-2 ③

유형 **3** ④ **3**-1 ① **3**-2 ①

유형 **4** ④ **4**-1 ② **4**-2 제3사분면

유형 **5** ③ **5**-1 ② **5**-2 ③

유형 **6** ② **6**-1 ④ **6**-2 ④

유형 1

ㄱ. $400^\circ=360^\circ\times1+40^\circ$ $\therefore$ 제1사분면

ㄴ. $950^\circ=360^\circ\times2+230^\circ$ $\therefore$ 제3사분면

ㄷ. $-200^\circ=360^\circ\times(-1)+160^\circ$ $\therefore$ 제2사분면

ㄹ. $-520^\circ=360^\circ\times(-2)+200^\circ$ $\therefore$ 제3사분면

따라서 제3사분면의 각은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ㄴ, ㄹ

1-1

ㄱ. $-700^\circ=360^\circ\times(-2)+20^\circ$ $\therefore$ 제1사분면

ㄴ. $-240^\circ=360^\circ\times(-1)+120^\circ$ $\therefore$ 제2사분면

ㄷ. $1180^\circ=360^\circ\times3+100^\circ$ $\therefore$ 제2사분면

ㄹ. $1400^\circ=360^\circ\times3+320^\circ$ $\therefore$ 제4사분면

따라서 제2사분면의 각은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

1-2

θ가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+90^\circ<\theta<360^\circ\times n+180^\circ$ (n은 정수)

$\therefore 120^\circ\times n+30^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times n+60^\circ$

(i) $n=3k$ (k는 정수)일 때,

$120^\circ\times 3k+30^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times 3k+60^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+30^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+60^\circ$

즉, $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k는 정수)일 때,

$120^\circ\times(3k+1)+30^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+1)+60^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+150^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+180^\circ$

즉, $\frac{\theta}{3}$는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k는 정수)일 때,

$120^\circ\times(3k+2)+30^\circ<\frac{\theta}{3}<120^\circ\times(3k+2)+60^\circ$

$\therefore\ 360^\circ\times k+270^\circ<\frac{\theta}{3}<360^\circ\times k+300^\circ$

즉, $\frac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 $\frac{\theta}{3}$는 제1사분면 또는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 $\frac{\theta}{3}$를 나타내는 동경은 제3사분면에 존재할 수 없다. 답 ③

유형 2

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이가 3π이므로

$r\times\frac{\pi}{6}=3\pi\qquad\therefore\ r=18$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 18\times 3\pi=27\pi$ 답 ⑤

다른풀이

부채꼴의 반지름의 길이가 18이므로 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 18^2\times\frac{\pi}{6}=27\pi$

2-1

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이가 $\frac{3}{4}\pi$이므로

$r\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi\qquad\therefore\ r=3$

따라서 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{4}\pi=\frac{9}{8}\pi$ 답 ③

2-2

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라 하면

호의 길이가 2π이므로 $r\theta=2\pi$ …… ㉠

넓이가 6π이므로 $\frac{1}{2}\times r\times 2\pi=6\pi\qquad\therefore\ r=6$

$r=6$을 ㉠에 대입하면

$6\theta=2\pi\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$ 답 ③

유형 3

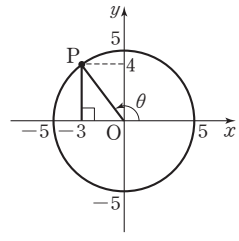
오른쪽 그림에서

$\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5},\ \cos\theta=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$

답 ④



3-1

오른쪽 그림에서

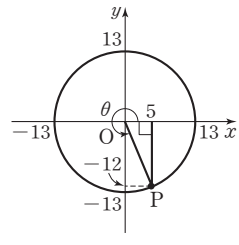
$\overline{OP}=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$이므로

$\sin\theta=\frac{-12}{13}=-\frac{12}{13},$

$\cos\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=-\frac{12}{13}-\frac{5}{13}$

$=-\frac{17}{13}$ 답 ①



3-2

오른쪽 그림에서

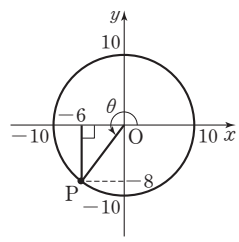
$\overline{OP}=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=10$이므로

$\sin\theta=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5},$

$\cos\theta=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$

$\therefore\ \sin\theta+\cos\theta=-\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)$

$=-\frac{7}{5}$ 답 ①



유형 4

(i) $\sin\theta\cos\theta<0$에서

$\sin\theta>0,\ \cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \cos\theta>0$

즉, θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$에서

$\cos\theta>0,\ \tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

즉, θ는 제4사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제4사분면의 각이다. 답 ④

4-1

(i) $\sin\theta\tan\theta<0$에서

$\sin\theta>0,\ \tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0,\ \tan\theta>0$

즉, θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta>0$에서

$\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

즉, θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다. 답 ②

4-2

(i) $\sin\theta\cos\theta>0$에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

즉, θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}<0$에서

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

즉, θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이다. 답 제3사분면

유형 5

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2=1$ $\therefore \sin^2\theta=\dfrac{9}{25}$

이때 θ가 제3사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{3}{5}$

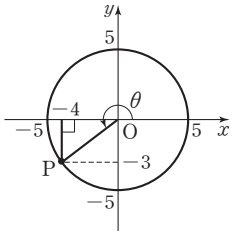
또한, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\dfrac{3}{4}$이므로

$\sin\theta+\tan\theta=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{20}$ 답 ③

다른풀이

θ가 제3사분면의 각이고

$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 만나는 점 P의 좌표는 $P(-4,\ -3)$



따라서 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$, $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$이므로

$\sin\theta+\tan\theta=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{20}$

5-1

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(\dfrac{5}{13}\right)^2+\cos^2\theta=1$ $\therefore \cos^2\theta=\dfrac{144}{169}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

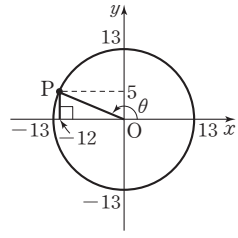
$\therefore \cos\theta=-\dfrac{12}{13}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\dfrac{5}{12}$ 답 ②

다른풀이

θ가 제2사분면의 각이고

$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 13인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 만나는 점 P의 좌표는 $P(-12,\ 5)$



$\therefore \tan\theta=-\dfrac{5}{12}$

5-2

$\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$에서 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{1}{3}$이므로

$\cos\theta=-3\sin\theta$ …… ㉠

㉠을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+9\sin^2\theta=1$ $\therefore \sin^2\theta=\dfrac{1}{10}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ ($\because$ ㉠)

이때 $\cos\theta-\sin\theta>0$이므로

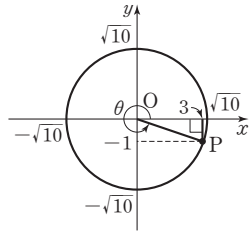
$$\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}=|\cos\theta-\sin\theta|=\cos\theta-\sin\theta$$
$$=\frac{3\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

답 ③

다른풀이

θ가 제4사분면의 각이고

$\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 만나는 점 P의 좌표는 $P(3,\ -1)$



$\therefore \sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

이때 $\cos\theta-\sin\theta>0$이므로

$$\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}=|\cos\theta-\sin\theta|=\cos\theta-\sin\theta$$
$$=\frac{3\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$
$$=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

유형 6

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{9}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{8}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{4}{9}$ 답 ②

6-1

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$, $2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ 답 ④

6-2

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=2$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 $\sin\theta-\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$ 답 ④

교과서 문제 정복하기

본문 36~37쪽

01 ② 02 ② 03 ④ 04 $\frac{3}{4}\pi$

05 $\frac{175}{3}\pi$ cm^2 06 ③ 07 200 m^2 08 ③

09 ① 10 ② 11 $2(\sin\theta-\cos\theta)$ 12 ⑤

13 ② 14 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 15 $\frac{13}{27}$ 16 ①

01

ㄱ. $30^\circ=30\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$ (거짓)

ㄴ. $135^\circ=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3}{4}\pi$ (참)

ㄷ. $-210^\circ=-210\times\frac{\pi}{180}=-\frac{7}{6}\pi$ (참)

ㄹ. $216^\circ=216\times\frac{\pi}{180}=\frac{6}{5}\pi$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ②

02

① $-880^\circ=360^\circ\times(-3)+200^\circ$ $\therefore$ 제 3 사분면

② $650^\circ=360^\circ\times1+290^\circ$ $\therefore$ 제 4 사분면

③ $1280^\circ=360^\circ\times3+200^\circ$ $\therefore$ 제 3 사분면

④ $-\frac{20}{3}\pi=2\pi\times(-4)+\frac{4}{3}\pi$ $\therefore$ 제 3 사분면

⑤ $\frac{13}{4}\pi=2\pi\times1+\frac{5}{4}\pi$ $\therefore$ 제 3 사분면

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다. 답 ②

03

각 θ를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta-\theta=2n\pi$ (n은 정수)

$3\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n\pi}{3}$ …… ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n\pi}{3}<\pi$이므로 $0<n<\frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 답 ④

참고 두 동경 OP, OQ가 나타내는 각을 각각 θ_1, θ_2라 하면 두 동경의 위치 관계에 대하여 다음이 성립한다. (단, n은 정수)

① 두 동경이 일치한다. $\Longleftrightarrow \theta_1-\theta_2=2n\pi$

② 두 동경이 원점에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \theta_1-\theta_2=2n\pi+\pi$

③ 두 동경이 x축에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \theta_1+\theta_2=2n\pi$

④ 두 동경이 y축에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \theta_1+\theta_2=2n\pi+\pi$

⑤ 두 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\Longleftrightarrow \theta_1+\theta_2=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

04

각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$5\theta-\theta=2n\pi+\pi$ (n은 정수)

$4\theta=2n\pi+\pi$ $\therefore \theta=\frac{(2n+1)\pi}{4}$ …… ㉠

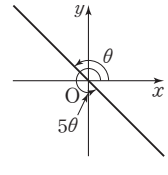
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{(2n+1)\pi}{4}<\pi$이므로

$2<2n+1<4$ $\therefore \frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

n은 정수이므로 $n=1$

이것을 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 답 $\frac{3}{4}\pi$

참고 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로 오른쪽 그림과 같다.



05

날개를 펼친 부분의 넓이는 반지름의 길이가 10 cm, 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times10^2\times\frac{7}{6}\pi=\frac{175}{3}\pi(\text{cm}^2)$ 답 $\frac{175}{3}\pi$ cm^2

06

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이가 8이고, 넓이가 12이므로

$\frac{1}{2}\times r\times8=12$ $\therefore r=3$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$2\times3+8=14$ 답 ③

07

부채꼴 OCD의 반지름의 길이를 r m, 중심각의 크기를 θ라 하면 호 CD의 길이가 10 m이므로

$r\theta=10$ ····· ㉠

호 AB의 길이가 30 m이므로

$(r+10)\theta=30$, $r\theta+10\theta=30$

㉠에서 $r\theta=10$이므로

$10+10\theta=30$ $\therefore \theta=2$

이것을 ㉠에 대입하면 $r=5$

따라서 도형 ABDC의 넓이는 부채꼴 OAB의 넓이에서 부채꼴 OCD의 넓이를 빼면 되므로

$\frac{1}{2}\times15\times30-\frac{1}{2}\times5\times10=200\,(\text{m}^2)$ 답 $200\ \text{m}^2$

08

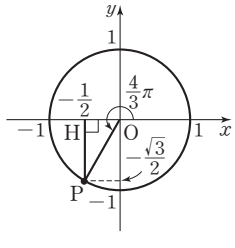
둘레의 길이가 16인 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이는 $16-2r$이므로 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}r(16-2r)=-r^2+8r=-(r-4)^2+16\ (0<r<8)$

따라서 부채꼴의 넓이는 $r=4$일 때 최대이므로 구하는 반지름의 길이는 4이다. 답 ③

09

오른쪽 그림과 같이 각 $\theta=\frac{4}{3}\pi$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OP}=1$, $\angle POH=\frac{\pi}{3}$이므로

$P\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=\sqrt{3}$이므로

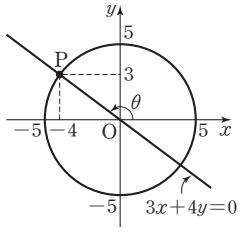
$(\sin\theta+\cos\theta)\times\tan\theta=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\times\sqrt{3}$

$=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\times\sqrt{3}=-\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

답 ①

10

오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이 직선 $3x+4y=0$, 즉 $y=-\frac{3}{4}x$와 만나는 점 중 제2사분면 위의 점을 P라 하면



P(−4, 3)

$\overline{OP}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\therefore 5(\sin\theta+\cos\theta)=5\left\{\frac{3}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}=-1$ 답 ②

11

θ가 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

즉, $\sin\theta-\cos\theta>0$, $\cos\theta-\sin\theta<0$

$\therefore \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}+\sqrt{(\cos\theta-\sin\theta)^2}$

$=|\sin\theta-\cos\theta|+|\cos\theta-\sin\theta|$

$=\sin\theta-\cos\theta-(\cos\theta-\sin\theta)$

$=2(\sin\theta-\cos\theta)$ 답 $2(\sin\theta-\cos\theta)$

12

$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1}{5}$에서 $5-5\cos\theta=1+\cos\theta$

$6\cos\theta=4$ $\therefore \cos\theta=\frac{2}{3}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

θ가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

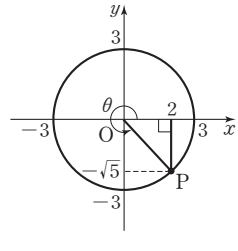
$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ 답 ⑤

다른풀이

$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1}{5}$에서 $5-5\cos\theta=1+\cos\theta$

$6\cos\theta=4$ $\therefore \cos\theta=\frac{2}{3}$

θ가 제4사분면의 각이고 $\cos\theta=\frac{2}{3}$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원을 그리면 각 θ를 나타내는 동경과 만나는 점 P의 좌표는



P(2, $-\sqrt{5}$)

$\therefore \sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

13

$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{\cos\theta(1-\sin\theta)+\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{\cos\theta-\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\cos\theta\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{2\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2}{\cos\theta}$ 답 ②

14

$\cos\theta-\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$, $2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

θ가 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$에서

$\sin\theta+\cos\theta>0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

15

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$, $2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{9}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$

$\therefore \sin^3\theta-\cos^3\theta$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{4}{9}\right)=\frac{13}{27}$ 답 $\frac{13}{27}$

16

이차방정식 $4x^2+2x+k=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{k}{4}$ …… ㉠

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{k}{4}=-\frac{3}{8}$ $\therefore k=-\frac{3}{2}$ 답 ①

06 삼각함수의 그래프

교과서 유형 흐름잡기

본문 39~41쪽

유형 1	④	1-1 ②	1-2 ③
유형 2	②	2-1 ②	2-2 ㄱ
유형 3	⑤	3-1 ②	3-2 ㄴ, ㄷ
유형 4	②	4-1 ①	4-2 ①
유형 5	②	5-1 ④	5-2 ②
유형 6	⑤	6-1 ①	
		6-2 $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$	

유형 1

$y=\sin 4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이므로 $a=\frac{\pi}{2}$

$y=\cos\frac{1}{3}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$이므로 $b=6\pi$

$\therefore a+b=\frac{\pi}{2}+6\pi=\frac{13}{2}\pi$ 답 ④

1-1

$y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $a=4$

$y=\tan\sqrt{2}\pi x$의 주기는 $\frac{\pi}{\sqrt{2}\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore ab=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ 답 ②

1-2

ㄱ. $y=\sin\frac{1}{4}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}=8\pi$

ㄴ. $y=\tan x$의 주기는 π

ㄷ. $y=\cos\frac{1}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$

ㄹ. $y=\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

따라서 주기가 π인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ③

유형 2

$-1\le\sin\frac{1}{2}x\le 1$이므로

$-3\le 3\sin\frac{1}{2}x\le 3$ $\therefore -2\le 3\sin\frac{1}{2}x+1\le 4$

따라서 최댓값 $M=4$, 최솟값 $m=-2$, 주기 $p=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이므로

$\frac{Mmp}{\pi}=\frac{4\times(-2)\times 4\pi}{\pi}=-32$ 답 ②

참고 삼각함수의 최대 · 최소

삼각함수	최댓값	최솟값
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.

2-1

$-1\le\cos\pi x\le1$이므로

$-2\le2\cos\pi x\le2$ $\therefore\ -5\le2\cos\pi x-3\le-1$

따라서 최댓값 $M=-1$, 최솟값 $m=-5$, 주기 $p=\frac{2\pi}{\pi}=2$이므로

$M+m+p=-1+(-5)+2=-4$ 답 ②

2-2

$-1\le\sin2x\le1$이므로

$-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\sin2x\le\frac{1}{2}$ $\therefore\ \frac{1}{2}\le1+\frac{1}{2}\sin2x\le\frac{3}{2}$

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\frac{3}{2}$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다. 답 ㄱ

유형 3

① 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이다.

②, ③ $-1\le\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\le1$이므로

$-2\le2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\le2$

$\therefore\ -1\le2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1\le3$

즉, 최댓값은 3, 최솟값은 -1이다.

④ $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

$=-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+1$

$=-2\cos2x+1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-2\cos2x+1$의 그래프와 일치한다.

⑤ $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+1$

$=2\sin2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$

이므로 함수 $y=2\sin2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

답 ⑤

3-1

① 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

②, ③ $-1\le\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\le1$이므로

$-2\le-2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\le2$

$\therefore\ -3\le-2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-1\le1$

즉, 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

④ $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{4}{3}\pi\right)-1$

$=2\cos\left(\frac{4}{3}\pi-\frac{x}{2}\right)-1$

$=2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)-1$

$=-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)-1$

$=-2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-1$

따라서 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{4}{3}\pi\right)-1$의 그래프와 일치한다.

⑤ $y=-2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-1$

$=-2\cos\frac{1}{2}\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)-1$

이므로 함수 $y=-2\cos\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}\pi$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

답 ②

3-2

ㄱ. $f(x)=3\tan\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)-2$의 최댓값과 최솟값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $f(x)=3\tan\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)-2$

$=3\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)-2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2π만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=3\tan\frac{1}{2}(x-2\pi+2\pi)-2+2$

$=3\tan\frac{1}{2}x$

즉, $y=3\tan\frac{1}{2}x$의 그래프와 겹쳐진다. (참)

ㄷ. $f(0)=3\tan\pi-2=0-2=-2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ -2)$를 지난다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ㄴ, ㄷ

유형 4

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\sin(-\theta)+\sin(4\pi+\theta)$

$=\sin\theta-\sin\theta+\sin\theta=\sin\theta$ 답 ②

4-1

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\cos\theta-\sin\theta\times\frac{1}{\tan\theta}$

$=\cos\theta-\sin\theta\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\cos\theta-\cos\theta=0$ 답 ①

4-2

$\sin\frac{32}{3}\pi-\cos\frac{41}{6}\pi+\tan\left(-\frac{45}{4}\pi\right)$

$=\sin\left(10\pi+\frac{2}{3}\pi\right)-\cos\left(6\pi+\frac{5}{6}\pi\right)+\tan\left(-12\pi+\frac{3}{4}\pi\right)$

$=\sin\frac{2}{3}\pi-\cos\frac{5}{6}\pi+\tan\frac{3}{4}\pi$

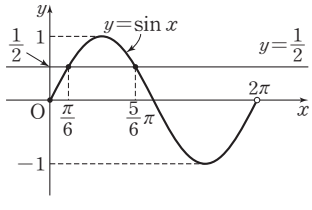
$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\sqrt{3}-1$ 답 ①

유형 5

$2\sin x-1=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$



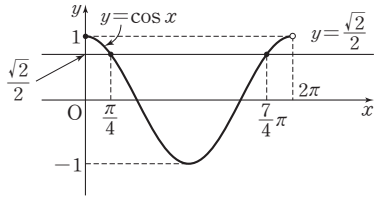
함수 $y=\sin x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표를 구하면 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$ 답 ②

5-1

$\sqrt{2}\cos x-1=0$에서 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$



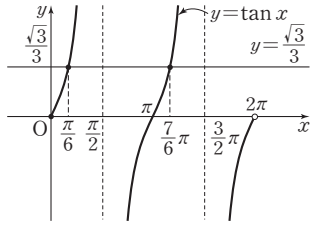
함수 $y=\cos x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표를 구하면 주어진 방정식의 근은

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{4}+\frac{7}{4}\pi=2\pi$ 답 ④

5-2

$\sqrt{3}\tan x-1=0$에서 $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$



함수 $y=\tan x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 교점의 x좌표를 구하면 주어진 방정식의 근은

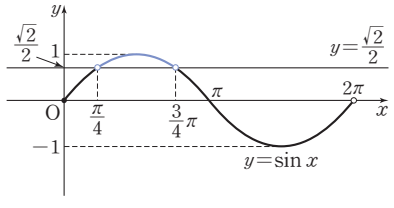
$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{7}{6}\pi$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{6}+\frac{7}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$이므로

$\sin\theta=\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 답 ②

유형 6

$1-\sqrt{2}\sin x<0$에서 $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$



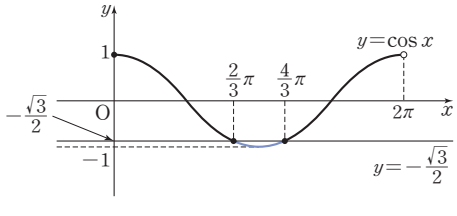
함수 $y=\sin x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$

따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ⑤이다. 답 ⑤

6-1

$2\cos x+\sqrt{3}\le0$에서 $\cos x\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$



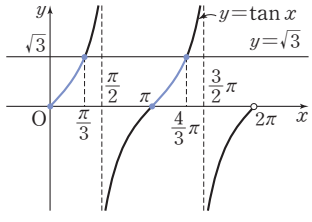
함수 $y=\cos x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프가 직선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$과 만나거나 그보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 주어진 부등식의 해는

$\frac{2}{3}\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$

따라서 주어진 부등식의 해가 될 수 없는 것은 ①이다. 답 ①

6-2

$0\le\sqrt{3}\tan x\le 3$에서 $0\le\tan x\le\sqrt{3}$



함수 $y=\tan x\ (0\le x<2\pi)$의 그래프가 직선 $y=0$과 만나거나 그보다 위쪽에 있고 직선 $y=\sqrt{3}$과 만나거나 그보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 주어진 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$

답 $0\le x\le\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi\le x\le\frac{4}{3}\pi$

교과서 문제 정복하기

본문 42~43쪽

01 ②	02 ③	03 치역: $\{y\mid 0\le y\le 4\}$, 주기: 4π		
04 $\frac{1}{15}$	05 8	06 ③	07 1	08 ②
09 2	10 ②	11 -15	12 ④	13 2π
14 6시간	15 $\frac{\pi}{6}$			

01

ㄱ. $y=\sin 3(x-\pi)$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y=\sin(3x+\pi)=\sin 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 후, x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. $y=3\sin 3x+1$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 3배 한 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 $y=\sin 3x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 그래프의 식은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ②

02

$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 그래프는 $y=\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이므로 구하는 그래프는 ③이다. 답 ③

03

$-1\le\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\le 1$이므로 $-2\le 2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\le 2$

$\therefore\ 0\le 2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+2\le 4$

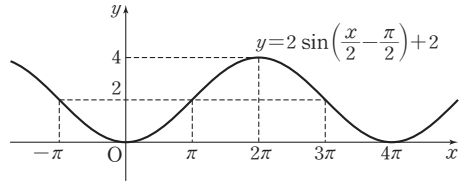
따라서 구하는 함수의 치역은 $\{y\mid 0\le y\le 4\}$

또한, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$이다.

답 치역: $\{y\mid 0\le y\le 4\}$, 주기: 4π

참고 $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+2=2\sin\frac{1}{2}(x-\pi)+2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 $y=2\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 π만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



04

$y=5\sin 150\pi t$의 그래프는 $y=\sin 150\pi t$의 그래프를 y축의 방향으로 5배 한 것과 같으므로 진폭 $a=5$

이 함수의 주기 $b=\frac{2\pi}{150\pi}=\frac{1}{75}$

$\therefore\ ab=5\times\frac{1}{75}=\frac{1}{15}$ 답 $\frac{1}{15}$

05

조건 (가)에서 $f(x)=a\cos bx+c$의 최댓값이 6이고 $a>0$이므로

$a+c=6$ …… ㉠

또한, $f(x)$의 최솟값이 2이므로

$-a+c=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=4$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 주기가 π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

$\therefore a+b+c=2+2+4=8$ 답 8

06

주어진 함수의 최댓값이 3이고 $a>0$이므로

$a=3$

주기는 $\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

$x=\frac{\pi}{3}$일 때, $y=0$이므로 $y=3\sin(2x+c)$에서

$0=3\sin\left(2\times\frac{\pi}{3}+c\right)$

이때 $0\le c<\pi$이므로

$c+\frac{2}{3}\pi=\pi$ $\therefore c=\frac{\pi}{3}$

$\therefore abc=3\times2\times\frac{\pi}{3}=2\pi$ 답 ③

07

$-1\le\sin x\le1$이므로

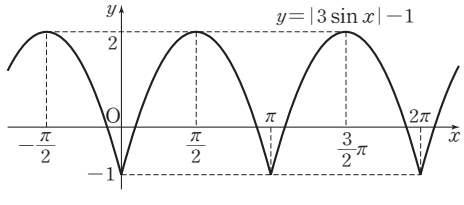
$-3\le3\sin x\le3$, $0\le|3\sin x|\le3$

$\therefore -1\le|3\sin x|-1\le2$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이므로

$M=2$, $m=-1$ $\therefore M+m=1$ 답 1

참고 $y=|3\sin x|-1$의 그래프는 다음 그림과 같다.



08

$$\frac{\sin\frac{7}{3}\pi+\tan\frac{9}{4}\pi}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$$

$=-7-4\sqrt{3}$ 답 ②

09

$\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin^2(\pi+\theta)+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=1+1=2$ 답 2

10

$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan1^\circ\times\tan2^\circ\times\tan3^\circ\times\cdots\times\tan89^\circ$

$=(\tan1^\circ\times\tan89^\circ)\times(\tan2^\circ\times\tan88^\circ)\times\cdots$

$\times(\tan44^\circ\times\tan46^\circ)\times\tan45^\circ$

$=\left(\tan1^\circ\times\frac{1}{\tan1^\circ}\right)\times\left(\tan2^\circ\times\frac{1}{\tan2^\circ}\right)\times\cdots$

$\times\left(\tan44^\circ\times\frac{1}{\tan44^\circ}\right)\times\tan45^\circ$

$=1\times1\times\cdots\times1\times1=1$ 답 ②

11

$\cos^2x=1-\sin^2x$이므로

$y=2\cos^2x-4\sin x+1$

$=2(1-\sin^2x)-4\sin x+1$

$=-2\sin^2x-4\sin x+3$

$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=-2t^2-4t+3$

$=-2(t+1)^2+5$

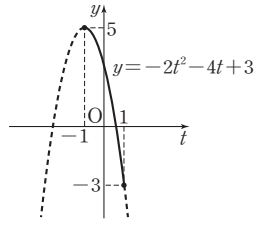
오른쪽 그림에서

$t=-1$일 때 최댓값 $M=5$,

$t=1$일 때 최솟값 $m=-3$

이므로

$Mm=-15$

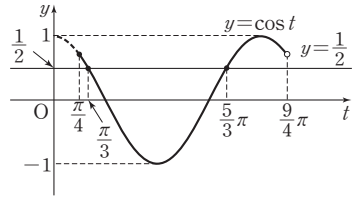


답 −15

12

$x+\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면

$0\le x<2\pi$에서 $\frac{\pi}{4}\le t<\frac{9}{4}\pi$이고 $\cos t=\frac{1}{2}$



위의 그래프에서 방정식 $\cos t=\frac{1}{2}$의 근은

$t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$

즉, $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{3}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{12}$ 또는 $x=\frac{17}{12}\pi$

따라서 두 근의 차는

$\frac{17}{12}\pi-\frac{\pi}{12}=\frac{4}{3}\pi$ 답 ④

13

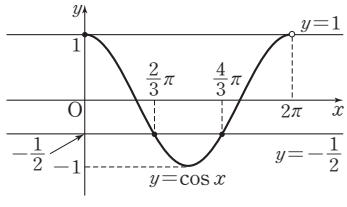
$\sin^2 x=1-\cos^2 x$이므로 $2\sin^2 x+\cos x-1=0$에서

$2(1-\cos^2 x)+\cos x-1=0$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$



함수 $y=\cos x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$이고, 함수 $y=\cos x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표는 0이므로 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 모든 근의 합은

$0+\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi=2\pi$ 답 2π

참고 $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식 $\cos x=-\frac{1}{2}$의 두 근의 합은 2π임을 알 수 있다.

14

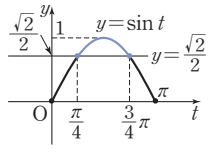
유속이 4 m/s 이상일 때 발전이 가능하므로

$4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}x\ge 4$ $\therefore \sin\frac{\pi}{12}x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{12}x=t$로 놓으면 $0\le t\le\pi$이고

$\sin t\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $y=\sin t$ $(0\le t\le\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$와 만나거나 그보다 위쪽에 있는 t의 값의 범위를 구하면



$\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{3}{4}\pi$

즉, $\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{12}x\le\frac{3}{4}\pi$이므로

$3\le x\le 9$

따라서 조류 발전이 가능한 시간은 6시간 동안이다.

답 6시간

15

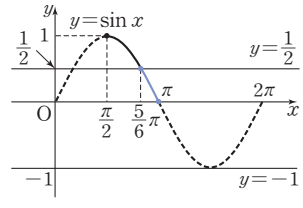
$\cos^2 x=1-\sin^2 x$이므로 $2\cos^2 x-\sin x\ge 1$에서

$2(1-\sin^2 x)-\sin x\ge 1$

$2\sin^2 x+\sin x-1\le 0$

$(\sin x+1)(2\sin x-1)\le 0$

$\therefore -1\le\sin x\le\frac{1}{2}$



함수 $y=\sin x$ $\left(\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\right)$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 그보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 직선 $y=-1$과 만나거나 그보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위를 구하면 주어진 부등식의 해는

$\frac{5}{6}\pi\le x\le\pi$

따라서 $a=\frac{5}{6}\pi$, $b=\pi$이므로

$b-a=\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{\pi}{6}$ 답 $\frac{\pi}{6}$

07 삼각함수의 활용

교과서 유형 흐름잡기

본문 45~47쪽

유형 1 ③ 1-1 ② 1-2 ④
유형 2 ⑤ 2-1 4 2-2 ③
유형 3 ③ 3-1 ①
3-2 $A=90^\circ$인 직각삼각형
유형 4 ② 4-1 ③ 4-2 $2\sqrt{19}$ m
유형 5 ③ 5-1 ④ 5-2 ⑤
유형 6 ④ 6-1 $3+4\sqrt{3}$ 6-2 $10\sqrt{3}$

유형 1

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{3}{\sin 30^\circ}$이므로

$a=\frac{3}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{3}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$ 답 ③

1-1

$A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 90^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$이므로

$a=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}\times\sin 90^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 1=2$ 답 ②

1-2

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 30^\circ}=2\times 4$이므로

$a=8\times\sin 30^\circ=8\times\frac{1}{2}=4$ 답 ④

유형 2

코사인법칙에 의하여

$7^2=8^2+a^2-2\times 8\times a\times\cos 60^\circ$

$49=64+a^2-2\times 8\times a\times\frac{1}{2}$

$a^2-8a+15=0$, $(a-3)(a-5)=0$

$\therefore a=5$ ($\because a>3$) 답 ⑤

2-1

코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{13})^2=3^2+c^2-2\times 3\times c\times\cos 60^\circ$

$13=9+c^2-2\times 3\times c\times\frac{1}{2}$

$c^2-3c-4=0$, $(c+1)(c-4)=0$

$\therefore c=4$ ($\because c>0$) 답 4

2-2

코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\times 2\times 3}=-\frac{3}{12}=-\frac{1}{4}$ 답 ③

유형 3

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이므로 이것을 주어진 식에 대입하면

$2\times\frac{a}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{b}{2R}$

$a^2+b^2-c^2=b^2$, $a^2=c^2$ $\therefore a=c$ ($\because a>0$, $c>0$)

따라서 $\triangle ABC$는 $a=c$인 이등변삼각형이다. 답 ③

3-1

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 이것을 주어진 식에 대입하면

$b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$b^2+c^2-a^2=c^2+a^2-b^2$, $a^2=b^2$

$\therefore a=b$ ($\because a>0$, $b>0$)

따라서 $\triangle ABC$는 $a=b$인 이등변삼각형이다. 답 ①

3-2

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이므로 이것을 주어진 식에 대입하면

$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=c\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$

$a^4-2a^2b^2+b^4-c^4=0$

$(a^2-b^2)^2-(c^2)^2=0$

$(a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$

$b^2=a^2+c^2$ 또는 $a^2=b^2+c^2$

$\therefore a^2=b^2+c^2$ ($\because a>b$)

따라서 $\triangle ABC$는 $A=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 $A=90^\circ$인 직각삼각형

유형 4

$\triangle ABC$에서

$A=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

사인법칙에 의하여

$\frac{15}{\sin 60^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{15}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{6}$ (m) 답 ②

4-1

△ABC에서

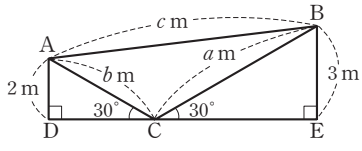
$C=180^\circ-(50^\circ+57^\circ)=73^\circ$

사인법칙에 의하여

$\dfrac{8}{\sin 73^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 57^\circ}$

$\therefore \overline{BC}=\dfrac{8}{\sin 73^\circ}\times\sin 57^\circ=\dfrac{8}{0.96}\times 0.84=7\,(\text{m})$ 답 ③

4-2



위의 그림과 같이 $\overline{BC}=a$ m, $\overline{AC}=b$ m, $\overline{AB}=c$ m라 하면

△ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{b}{\sin 90^\circ}=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}$

$\therefore b=\dfrac{2}{\sin 30^\circ}\times\sin 90^\circ=\dfrac{2}{\frac{1}{2}}\times 1=4$

△BCE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin 90^\circ}=\dfrac{3}{\sin 30^\circ}$

$\therefore a=\dfrac{3}{\sin 30^\circ}\times\sin 90^\circ=\dfrac{3}{\frac{1}{2}}\times 1=6$

△ACB에서 $\angle ACB=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

$a=6$, $b=4$이므로 코사인법칙에 의하여

$c^2=6^2+4^2-2\times 6\times 4\times\cos 120^\circ$

$=36+16-2\times 6\times 4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=76$

$\therefore c=2\sqrt{19}\ (\because c>0)$

따라서 줄의 길이는 $2\sqrt{19}$ m이다. 답 $2\sqrt{19}$ m

유형 5

△ABC에서

$a=5$, $b=7$, $c=8$이라 하면

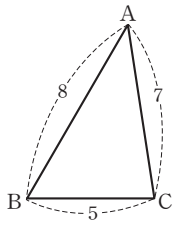
코사인법칙에 의하여

$\cos B=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\times 8\times 5}=\dfrac{40}{80}=\dfrac{1}{2}$

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$

따라서 △ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 8\times 5\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times 8\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ 답 ③



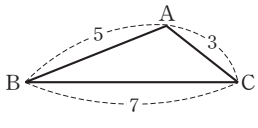
5-1

△ABC에서

$a=7$, $b=3$, $c=5$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times 3\times 5}=-\dfrac{15}{30}=-\dfrac{1}{2}$



이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

따라서 △ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times 3\times 5\times\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\times 3\times 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ 답 ④

5-2

△ABC에서 $a=2k$, $b=3k$, $c=4k$ $(k>0)$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\cos C=\dfrac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times 2k\times 3k}=\dfrac{-3k^2}{12k^2}=-\dfrac{1}{4}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

이때 △ABC의 넓이가 $3\sqrt{15}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times 2k\times 3k\times\sin C=\dfrac{1}{2}\times 2k\times 3k\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$

$k^2=4$ $\therefore k=2\ (\because k>0)$

따라서 △ABC의 가장 긴 변의 길이는

$4k=4\times 2=8$ 답 ⑤

유형 6

오른쪽 그림과 같이 대각선 AC를 그으면 △ABC는 이등변삼각형이므로

$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)=60^\circ$

따라서 △ABC는 정삼각형이므로

$\overline{AC}=6$

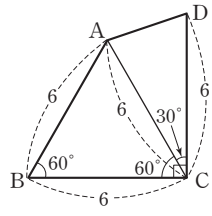
이때 $\angle ACD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로

□ABCD=△ABC+△ACD

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\times 6\times 6\times\dfrac{1}{2}$

$=9\sqrt{3}+9$ 답 ④



6-1

오른쪽 그림과 같이 대각선 AC를 그으면 △ACD는 이등변삼각형이므로

$\angle CAD=\dfrac{1}{2}\times(180^\circ-60^\circ)$

$=60^\circ$

따라서 △ACD는 정삼각형이므로

$\overline{AC}=4$

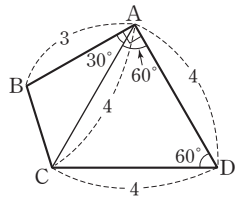
이때 $\angle BAC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$이므로

□ABCD=△ABC+△ACD

$=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\times\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin 60^\circ$

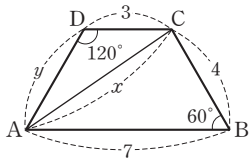
$=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=3+4\sqrt{3}$ 답 $3+4\sqrt{3}$



6-2

오른쪽 그림과 같이 대각선 AC를 긋고 $\overline{AC}=x$로 놓으면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의하여



$x^2=7^2+4^2-2\times7\times4\times\cos 60^\circ$

$=49+16-2\times7\times4\times\frac{1}{2}=37$

$\therefore x=\sqrt{37}\ (\because x>0)$

$\overline{AD}=y$로 놓으면 $\triangle ACD$에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{37})^2=3^2+y^2-2\times3\times y\times\cos 120^\circ$

$37=9+y^2-2\times3\times y\times\left(-\frac{1}{2}\right),\ y^2+3y-28=0$

$(y+7)(y-4)=0$

$\therefore y=4\ (\because y>0)$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times7\times4\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}\times7\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=7\sqrt{3}+3\sqrt{3}=10\sqrt{3}$ 답 $10\sqrt{3}$

교과서 문제 정복하기

본문 48~49쪽

01 ③ 02 ② 03 $2\sqrt{6}$ 04 ① 05 ③

06 $\sqrt{15}$ 07 $B=90^\circ$인 직각삼각형

08 $\frac{31}{4}$ km 09 $\frac{5}{2}$ 10 ③ 11 ③ 12 5

13 ④ 14 $2\sqrt{3}+3$ 15 60° 16 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

01

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R \quad \therefore R=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2$

따라서 $\triangle ABC$의 외접원의 넓이는

$\pi\times2^2=4\pi$ 답 ③

02

$A+B+C=180^\circ$이므로

$A=180^\circ\times\frac{1}{1+2+3}=30^\circ,\ B=180^\circ\times\frac{2}{1+2+3}=60^\circ$

$a=2$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin 30^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}$

$\therefore b=\frac{2}{\sin 30^\circ}\times\sin 60^\circ=\frac{2}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ 답 ②

03

원주각의 크기와 호의 길이는 정비례하므로

$A:B:C=\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}:\overset{\frown}{AB}=8:1:3$

$\therefore A=180^\circ\times\frac{8}{8+1+3}=120^\circ,\ B=180^\circ\times\frac{1}{8+1+3}=15^\circ,$

$C=180^\circ\times\frac{3}{8+1+3}=45^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$

$\therefore \overline{AB}=\frac{6}{\sin 120^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$ 답 $2\sqrt{6}$

참고 원주각의 크기와 호의 길이

① 한 원에서 같은 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

② 원주각의 크기와 호의 길이는 정비례한다.

04

사인법칙에 의하여

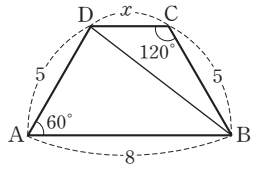
$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:1$

따라서 $a=k,\ b=\sqrt{2}k,\ c=k\ (k>0)$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{k^2+k^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\times k\times k}=0$ 답 ①

05

오른쪽 그림과 같이 대각선 BD를 그으면 $\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여



$\overline{BD}^2=5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos 60^\circ$

$=25+64-2\times5\times8\times\frac{1}{2}$

$=49$ ····· ㉠

$\triangle BCD$에서 $\overline{CD}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=5^2+x^2-2\times5\times x\times\cos 120^\circ$

$=25+x^2-2\times5\times x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=x^2+5x+25$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $x^2+5x+25=49$

$x^2+5x-24=0,\ (x+8)(x-3)=0$

$\therefore x=3\ (\because x>0)$

$\therefore \overline{CD}=3$ 답 ③

06

$\square ABCD$가 원에 내접하므로 $A+C=180^\circ$

$\therefore \cos A=\cos(180^\circ-C)=-\cos C=-\frac{1}{6}$

$\triangle ABD$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos A$

$=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{6}\right)=15$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{15}\ (\because \overline{BD}>0)$ 답 $\sqrt{15}$

07

$\cos^2 A=1-\sin^2 A$이고 $\cos^2 B=1-\sin^2 B$이므로 이것을 주어진 식에 대입하면

$(1-\sin^2 A)-(1-\sin^2 B)=\sin^2 C$

$\therefore \sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$ …… ㉠

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이것을 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 △ABC는 $B=90^\circ$인 직각삼각형이다.

답 $B=90^\circ$인 직각삼각형

08

A → B → C → D를 따라 걷는 산책로는 18 km이므로

A → C → D를 따라 걷는 산책로는 17 km이다.

△ABC에서 $\overline{AC}=x$ km라 하면

$x+\overline{CD}=17$, $6+\overline{BC}+\overline{CD}=18$

이므로 $\overline{BC}=(x-5)$ km

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=6^2+(x-5)^2-2\times6\times(x-5)\times\cos 120^\circ$

$=36+x^2-10x+25-2\times6\times(x-5)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=x^2-4x+31$

$4x=31$ $\therefore x=\frac{31}{4}$

따라서 $\overline{AC}$의 길이는 $\frac{31}{4}$ km이다.

답 $\frac{31}{4}$ km

09

△ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{4^2+8^2-5^2}{2\times4\times8}=\frac{55}{64}$

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=4^2+2^2-2\times4\times2\times\cos B$

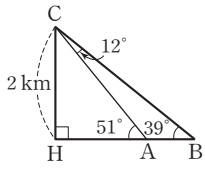
$=16+4-2\times4\times2\times\frac{55}{64}=\frac{25}{4}$

$\therefore \overline{AD}=\frac{5}{2}$ ($\because \overline{AD}>0$)

답 $\frac{5}{2}$

10

오른쪽 그림과 같이 헬리콥터의 위치를 C라 하면 △CHA에서



$\frac{\overline{AC}}{\sin 90^\circ}=\frac{2}{\sin 51^\circ}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{2}{\sin 51^\circ}$

△ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin 12^\circ}=\frac{\overline{AC}}{\sin 39^\circ}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{AC}\times\frac{\sin 12^\circ}{\sin 39^\circ}=\frac{2}{\sin 51^\circ}\times\frac{\sin 12^\circ}{\sin 39^\circ}$

$=\frac{2}{0.78}\times\frac{0.21}{0.63}$

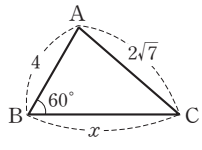
$=0.854\cdots$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 구하면 0.85 km이다.

답 ③

11

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}=x$라 하면 코사인법칙에 의하여



$(2\sqrt{7})^2=4^2+x^2-2\times4\times x\times\cos 60^\circ$

$28=16+x^2-4x$, $x^2-4x-12=0$

$(x-6)(x+2)=0$

$\therefore x=6$ ($\because x>0$)

따라서 $\overline{BC}=6$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin 60^\circ$

$=\frac{1}{2}\times4\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

답 ③

12

$A+B+C=180^\circ$이므로

$C=180^\circ-(A+B)$

$\therefore \sin C=\sin(180^\circ-(A+B))$

$=\sin(A+B)=\frac{1}{3}$

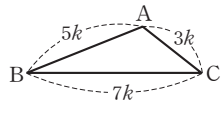
따라서 △ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin C=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{1}{3}=5$

답 5

13

$a:b:c=7:3:5$이므로



$a=7k$, $b=3k$, $c=5k$ ($k>0$)

로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times3k\times5k}$

$=\frac{-15k^2}{30k^2}=-\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$이므로 $A=120^\circ$

△ABC의 넓이가 $15\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times5k\times3k\times\sin 120^\circ=15\sqrt{3}$

$\frac{15k^2}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$

$k^2=4$ $\therefore k=2$ ($\because k>0$)

$\therefore a=7k=7\times2=14$

답 ④

14

△ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos 60^\circ$

$=4+16-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$

$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{3}\ (\because \overline{BD}>0)$

$\therefore$ □ABCD

$=$△ABD$+$△BCD

$=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times2\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=2\sqrt{3}+3$ 답 $2\sqrt{3}+3$

15

평행사변형 ABCD의 넓이가 $12\sqrt{3}$이므로

$6\times4\times\sin B=12\sqrt{3}$

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<B<90^\circ$이므로 $B=60^\circ$ 답 60°

16

△ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로

△ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(6+10+14)=15\sqrt{3}$

△ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\frac{6\times10\times14}{4R}=15\sqrt{3}$

$\therefore R=\frac{14\sqrt{3}}{3}$ 답 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$

참고 △ABC에서 세 변의 길이가 각각 a, b, c이고 내접원의 반지름의 길이가 r일 때

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(a+b+c)$

Ⅲ. 수열

되짚어 보기

› 본문 50쪽

01 (1) 11 (2) 50

02 (1) 3, 6, 9, 12, 15, 18 (2) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

03 (1) 5 (2) 11 (3) 17

04 (1) 2 (2) 10 (3) 50

05 (1) 1 (2) 5

08 등차수열과 등비수열

교과서 유형 흐름잡기

› 본문 53~55쪽

유형 1	④	1-1 ②	1-2 제12항
유형 2	③	2-1 제8항	2-2 ⑤
유형 3	⑤	3-1 ①	3-2 −6
유형 4	②	4-1 ①	4-2 192
유형 5	③	5-1 ④	5-2 12
유형 6	④	6-1 ①	6-2 ③

유형 1

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_5=a+4d=72$, $a_{10}=a+9d=37$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=100$, $d=-7$

$\therefore a_n=100+(n-1)\times(-7)=-7n+107$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$-7n+107<0$ $\therefore n>\frac{107}{7}=15.2\cdots$

그런데 n은 자연수이므로 처음으로 음수가 되는 항은 제16항이다. 답 ④

참고 $a_n=-7n+107$에서

$a_{15}=-7\times15+107=2$, $a_{16}=-7\times16+107=-5$

이므로 제16항에서 처음으로 음수가 되는 것을 확인할 수 있다.

1-1

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_2=a+d=-10$, $a_7=a+6d=30$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-18$, $d=8$

$\therefore a_n=-18+(n-1)\times8=8n-26$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$8n-26>0$ $\therefore n>\frac{26}{8}=3.25$

그런데 n은 자연수이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제4항이다. 답 ②

1-2

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2=-8$에서 $a+(a+d)=-8$

$\therefore 2a+d=-8$ …… ㉠

$a_3+a_4=0$에서 $(a+2d)+(a+3d)=0$

$\therefore 2a+5d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $d=2$

$\therefore a_n=-5+(n-1)\times 2=2n-7$

이때 제 n 항에서 처음으로 15보다 커진다고 하면

$2n-7>15$ $\therefore n>11$

그런데 n은 자연수이므로 처음으로 15보다 커지는 항은 제 12 항이다. 답 제 12 항

유형 2

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=12$ …… ㉠

$a_4=ar^3=108$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=9$ $\therefore r=3$ ($\because r>0$)

$r=3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=4$

$\therefore a_n=4\times 3^{n-1}$

이때 제 n 항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$4\times 3^{n-1}>1000$, $3^{n-1}>250$

$3^5=243$, $3^6=729$이므로

$n-1\geq 6$ $\therefore n\geq 7$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제 7 항이다. 답 ③

참고 $a_n=4\times 3^{n-1}$에서

$a_6=4\times 3^5=972$, $a_7=4\times 3^6=2916$이므로 제 7 항에서 처음으로 1000보다 커지는 것을 확인할 수 있다.

2-1

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=48$ …… ㉠

$a_5=ar^4=6$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^3=\frac{1}{8}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r$는 실수)

$r=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=96$

$\therefore a_n=96\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

이때 제 n 항에서 처음으로 1보다 작아진다고 하면

$96\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<1$, $2^{n-1}>96$

$2^6=64$, $2^7=128$이므로

$n-1\geq 7$ $\therefore n\geq 8$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제 8 항이다. 답 제 8 항

2-2

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_5=ar+ar^4=ar(1+r^3)=54$ …… ㉠

$a_3+a_6=ar^2+ar^5=ar^2(1+r^3)=108$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$18a=54$ $\therefore a=3$

$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}$

이때 $a_n>600$에서

$3\times 2^{n-1}>600$, $2^{n-1}>200$

$2^7=128$, $2^8=256$이므로

$n-1\geq 8$ $\therefore n\geq 9$

따라서 자연수 n의 최솟값은 9이다. 답 ⑤

유형 3

a는 4와 b의 등차중항이므로

$a=\frac{4+b}{2}$ …… ㉠

b는 a와 4의 등비중항이므로

$b^2=4a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^2=4\times\frac{4+b}{2}=2(4+b)$, $b^2-2b-8=0$

$(b+2)(b-4)=0$ $\therefore b=-2$ 또는 $b=4$

이를 ㉠에 각각 대입하면

$b=-2$일 때, $a=1$

$b=4$일 때, $a=4$

이때 4, a, b는 서로 다른 수이므로

$a=1$, $b=-2$

$\therefore a-b=3$ 답 ⑤

참고 4, a, b, 즉 4, 1, -2는 공차가 -3인 등차수열을 이루고, a, b, 4, 즉 1, -2, 4는 공비가 -2인 등비수열을 이룬다.

3-1

a는 4와 b의 등차중항이므로

$a=\frac{4+b}{2}$ …… ㉠

b는 a와 18의 등비중항이므로

$b^2=18a$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$b^2=18\times\frac{4+b}{2}=9(4+b)$, $b^2-9b-36=0$

$(b+3)(b-12)=0$ $\therefore b=-3$ 또는 $b=12$

이때 b는 양수이므로 $b=12$

$b=12$를 ㉠에 대입하면 $a=8$

$\therefore a+b=20$ 답 ①

3-2

b는 a와 c의 등차중항이므로

$2b=a+c$ …… ㉠

a는 b와 c의 등비중항이므로

$a^2=bc$ …… ㉡

$abc=27$이므로 이 식에 ㉡을 대입하면

$a^3=27$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$2b=3+c$, $bc=9$

두 식을 연립하여 풀면

$b=3$, $c=3$ 또는 $b=-\frac{3}{2}$, $c=-6$

이때 a, b, c는 서로 다른 실수이므로

$a=3$, $b=-\frac{3}{2}$, $c=-6$ 답 -6

유형 4

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_4=\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=16$

$\therefore 2a+3d=8$ …… ㉠

$S_9=\frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2}=126$

$\therefore a+4d=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-2$, $d=4$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 -2이다. 답 ②

4-1

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_5=\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2}=10$

$\therefore a+2d=2$ …… ㉠

$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=45$

$\therefore 2a+9d=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=0$, $d=1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공차는 1이다. 답 ①

4-2

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

첫째항부터 제 8 항까지의 합이 32이므로

$\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=32$

$\therefore 2a+7d=8$ …… ㉠

첫째항부터 제 12 항까지의 합이 96이므로

$\frac{12\{2a+(12-1)d\}}{2}=96$

$\therefore 2a+11d=16$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-3$, $d=2$

따라서 첫째항부터 제 16 항까지의 합은

$\frac{16\{2\times(-3)+(16-1)\times2\}}{2}=192$ 답 192

유형 5

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_5=\frac{a(1-r^5)}{1-r}=5$ …… ㉠

$S_{10}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=\frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r}=20$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$5(1+r^5)=20$ $\therefore r^5=3$

$\therefore S_{15}=\frac{a(1-r^{15})}{1-r}=\frac{a(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^5)}{1-r}\times(1+r^5+r^{10})$

$=5(1+3+3^2)=65$ 답 ③

5-1

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_{10}=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=2$ …… ㉠

$S_{20}=\frac{a(1-r^{20})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}=14$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(1+r^{10})=14$ $\therefore r^{10}=6$

$\therefore S_{30}=\frac{a(1-r^{30})}{1-r}=\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r}$

$=\frac{a(1-r^{10})}{1-r}\times(1+r^{10}+r^{20})$

$=2(1+6+6^2)=86$ 답 ④

5-2

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=16$ …… ㉠

$S_{2n}=\frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=\frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}=24$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$16(1+r^n)=24$, $1+r^n=\frac{3}{2}$ $\therefore r^n=\frac{1}{2}$

$\therefore a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{3n}$

$=S_{3n}-S_n$

$=\frac{a(1-r^{3n})}{1-r}-16$

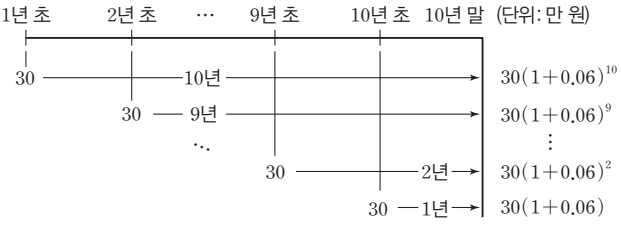
$=\frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r}-16$

$=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\times(1+r^n+r^{2n})-16$

$=16\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}-16=12$ 답 12

유형 6

연이율 6 %, 1년마다의 복리로 매년 초에 30만 원씩 10년 동안 적립한 금액의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 10년째 말의 적립금의 원리합계를 S라 하면

$S=30(1+0.06)+30(1+0.06)^2+\cdots+30(1+0.06)^{10}$

$=\dfrac{30(1+0.06)\{(1+0.06)^{10}-1\}}{(1+0.06)-1}$

$=\dfrac{30\times1.06\times(1.8-1)}{0.06}=424$(만 원) 답 ④

참고 연이율 r, 1년마다의 복리로 매년 a원씩 n년 동안 적립할 때, n년째 말의 적립금의 원리합계를 S_n이라 하면

(1) 매년 초에 적립할 때

$S_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$

$=\dfrac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$(원)

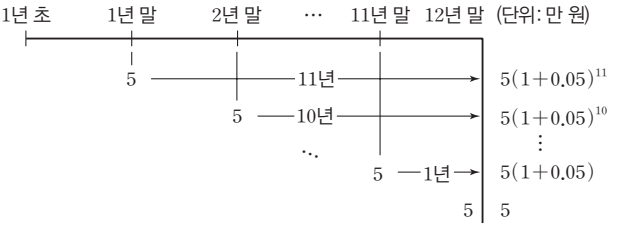
(2) 매년 말에 적립할 때

$S_n=a+a(1+r)+a(1+r)^2+\cdots+a(1+r)^{n-1}$

$=\dfrac{a\{(1+r)^n-1\}}{r}$(원)

6-1

연이율 5 %, 1년마다의 복리로 매년 말에 5만 원씩 12년 동안 적립한 금액의 원리합계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 12년째 말의 적립금의 원리합계를 S라 하면

$S=5+5(1+0.05)+5(1+0.05)^2+\cdots+5(1+0.05)^{11}$

$=\dfrac{5\{(1+0.05)^{12}-1\}}{(1+0.05)-1}$

$=\dfrac{5\times(1.8-1)}{0.05}=80$(만 원) 답 ①

6-2

연이율 4 %의 복리로 매년 초에 a원씩 5년 동안 적립한 금액의 원리합계를 S라 하면

$S=a(1+0.04)+a(1+0.04)^2+\cdots+a(1+0.04)^5$

$=\dfrac{a(1+0.04)\{(1+0.04)^5-1\}}{(1+0.04)-1}$

$=\dfrac{a\times1.04\times(1.2-1)}{0.04}=\dfrac{a\times1.04\times0.2}{0.04}$(원)

이때 $S=1000000$이어야 하므로

$\dfrac{a\times1.04\times0.2}{0.04}=1000000$

$\therefore a=\dfrac{1000000\times0.04}{1.04\times0.2}\fallingdotseq192000$

따라서 매년 초에 192000원씩 적립해야 한다. 답 ③

교과서 문제 정복하기

› 본문 56~57쪽

01 ④ 02 ④ 03 ① 04 ② 05 ③

06 63 07 $\dfrac{25}{2}$ 08 ③ 09 ③ 10 1010

11 $15\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^8$ m 12 3069 13 $\dfrac{85}{16}$

14 12520 15 $a_n=4n-5$ 16 ④

01

공차를 d라 하면 제 20 항이 83이므로

$7+19d=83$, $19d=76$

$\therefore d=4$

따라서 주어진 등차수열의 공차는 4이다. 답 ④

02

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_6=a+5d=15$ …… ㉠

$a_3:a_9=1:9$에서 $a_9=9a_3$이므로

$a+8d=9(a+2d)$, $4a+5d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-5$, $d=4$

$\therefore a_n=-5+(n-1)\times4=4n-9$

$\therefore a_{12}=4\times12-9=39$ 답 ④

03

공비를 r라 하면 제 4 항이 12이므로

$-96\times r^3=12$, $r^3=-\dfrac{1}{8}$

$\therefore r=-\dfrac{1}{2}$ ($\because r$는 실수)

따라서 주어진 등비수열의 공비는 $-\dfrac{1}{2}$이다. 답 ①

04

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_3=ar^2=27$ …… ㉠

$a_7=ar^6=\dfrac{1}{3}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^4=\dfrac{1}{81}$ $\therefore r=\dfrac{1}{3}$ ($\because r>0$)

$r=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{9}a=27 \quad \therefore a=243$

$\therefore a_n=243\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

이때 $\frac{1}{81}$을 제 n 항이라 하면

$243\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{81}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{9}$

$n-1=9 \quad \therefore n=10$

따라서 $\frac{1}{81}$은 제 10 항이다. 답 ②

05

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3=-12$에서

$a+(a+d)+(a+2d)=-12$

$3a+3d=-12 \quad \therefore a+d=-4$ …… ㉠

$a_4+a_5+a_6=33$에서

$(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=33$

$3a+12d=33 \quad \therefore a+4d=11$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-9$, $d=5$

$\therefore a_n=-9+(n-1)\times5=5n-14$

이때 제 n 항에서 처음으로 70보다 커진다고 하면

$5n-14>70 \quad \therefore n>\frac{84}{5}=16.8$

그런데 n은 자연수이므로 처음으로 70보다 커지는 항은 제 17 항이다. 답 ③

06

등차수열 3, a, b, c, 243의 공차를 d라 하면

첫째항이 3, 제 5 항이 243이므로

$3+4d=243 \quad \therefore d=60$

이때 a는 제 2 항이므로

$a=3+60=63$ 답 63

07

등비수열 2, x, y, z, $\frac{625}{8}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

첫째항이 2, 제 5 항이 $\frac{625}{8}$이므로

$2\times r^4=\frac{625}{8}$, $r^4=\frac{625}{16}$

$\therefore r=\frac{5}{2}$ $(\because r>0)$

이때 y는 제 3 항이므로

$y=2\times\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$ 답 $\frac{25}{2}$

다른풀이

2, x, y, z, $\frac{625}{8}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 2, y, $\frac{625}{8}$도 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

즉, y는 2와 $\frac{625}{8}$의 등비중항이므로

$y^2=2\times\frac{625}{8}=\frac{625}{4} \quad \therefore y=\frac{25}{2}$ $(\because y>0)$

08

첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_4=a+3d=11$

$a_8=a+7d=23$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $d=3$

따라서 첫째항부터 제 20 항까지의 합은

$\frac{20\{2\times2+(20-1)\times3\}}{2}=610$ 답 ③

09

공차를 d라 하면

$S_5=S_7$에서 $\frac{5(2\times15+4d)}{2}=\frac{7(2\times15+6d)}{2}$

$\therefore d=-\frac{30}{11}$

$\therefore a_n=15+(n-1)\times\left(-\frac{30}{11}\right)=-\frac{30}{11}n+\frac{195}{11}$

이때 $a_n<0$에서

$-\frac{30}{11}n+\frac{195}{11}<0$, $\frac{30}{11}n>\frac{195}{11} \quad \therefore n>\frac{195}{30}=6.5$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다. 답 ③

다른풀이

$S_5=S_7$에서 $S_7-S_5=0$

$\therefore a_6+a_7=0$

즉, $a_7=-a_6$이므로 제 6 항과 제 7 항의 부호는 서로 다르다.

이때 첫째항이 양수이므로 이 수열의 제 6 항까지는 양수이고, 제 7 항부터 음수이다.

따라서 $a_n<0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 7이다.

10

100 이하의 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 수부터 차례대로 나열하면

3, 8, 13, 18, …, 98

이것은 첫째항이 3, 공차가 5인 등차수열이고 98을 이 수열의 제 n 항이라 하면

$98=3+(n-1)\times5 \quad \therefore n=20$

따라서 첫째항이 3, 제 20 항이 98인 등차수열의 첫째항부터 제 20 항까지의 합은

$\frac{20\times(3+98)}{2}=1010$ 답 1010

11

n번째 튀어 오른 공의 높이를 a_n m라 하면

$a_1=15\times\frac{3}{4}$

$a_2=a_1\times\frac{3}{4}=15\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$a_3=a_2\times\frac{3}{4}=15\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $15\times\frac{3}{4}$이고, 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열이므로

$a_n=15\times\frac{3}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=15\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 $a_8=15\times\left(\frac{3}{4}\right)^8$이므로 8번째 튀어 오른 공의 높이는

$15\times\left(\frac{3}{4}\right)^8$ m이다. 답 $15\times\left(\frac{3}{4}\right)^8$ m

12

첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=ar=6$ …… ㉠

$a_4=ar^3=24$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^2=4$ $\therefore r=2\ (\because r>0)$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=6$ $\therefore a=3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10 항까지의 합은

$\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3069$ 답 3069

13

n번째 시행에서 색칠하는 정사각형의 넓이를 a_n이라 하자.

첫 번째 시행에서 색칠하는 정사각형의 넓이는

$a_1=2^2=4$

두 번째 시행에서 색칠하는 정사각형의 넓이는 첫 번째 시행에서 색칠한 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$a_2=4\times\frac{1}{4}=1$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$a_n=4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

따라서 4번째 시행 후 색칠한 정사각형의 넓이의 합은

$\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^4\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}\times\frac{4^4-1}{4^4}$

$=\frac{16}{3}\times\frac{255}{256}=\frac{85}{16}$ 답 $\frac{85}{16}$

14

$S_n=5(5^n-1)$에서

$a_1=S_1=5\times(5-1)=20$

$a_5=S_5-S_4=5(5^5-1)-5(5^4-1)$

$=5^5\times(5-1)=12500$

$\therefore a_1+a_5=12520$ 답 12520

15

$S_n=2n^2-3n$에서

(i) $n=1$일 때

$a_1=S_1=2\times1^2-3\times1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-3n)-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=4n-5$ …… ㉠

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=4n-5$ 답 $a_n=4n-5$

참고 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n에 대하여 $S_n=An^2+Bn+C$ (A, B, C는 상수)일 때

① $C=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.

② $C\neq0$이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.

16

연이율 2 %의 복리로 매년 말에 a만 원씩 6년 동안 적립한 금액의 원리합계는

$a+a(1+0.02)+a(1+0.02)^2+\cdots+a(1+0.02)^5$

$=\frac{a(1.02^6-1)}{1.02-1}=\frac{a(1.1-1)}{0.02}$

$=\frac{a\times0.1}{0.02}=5a$(만 원)

이때 $5a=260$이므로 $a=52$ 답 ④

09 수열의 합

교과서 유형 흐름잡기

본문 59~61쪽

유형 1 ③	1-1 ㄱ, ㄷ	1-2 ④
유형 2 ②	2-1 ④	2-2 130
유형 3 ③	3-1 ⑤	3-2 ④
유형 4 ③	4-1 ①	4-2 1330
유형 5 ①	5-1 ②	5-2 12
유형 6 ②	6-1 $\sqrt{51}+4\sqrt{2}-1$	6-2 ③

유형 1

ㄱ. 수열 1, 4, 7, …, 100은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

이때 $100=3\times34-2$이므로 100은 제 34 항이다.

$\therefore 1+4+7+\cdots+100=\sum_{k=1}^{34}(3k-2)$ (거짓)

ㄴ. 수열 1, 5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5은 첫째항이 1, 공비가 5인 등비수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1\times5^{n-1}=5^{n-1}$

이때 5^5은 제 6 항이므로

$1+5+5^2+5^3+5^4+5^5=\sum_{k=1}^{6}5^{k-1}$ (거짓)

ㄷ. $1+4+9+16+\cdots+100=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2=\sum_{k=0}^{10}k^2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄷ뿐이다. 답 ③

1-1

ㄱ. $3+6+9+\cdots+30$

$=3\times1+3\times2+3\times3+\cdots+3\times10$

$=\sum_{k=1}^{10}3k$ (참)

ㄴ. 수열 1, 3, 5, …, 51은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

이때 $51=2\times26-1$이므로 51은 제 26 항이다.

$\therefore 1+3+5+\cdots+51=\sum_{k=1}^{26}(2k-1)$ (거짓)

ㄷ. $1-1+1-1+1-1$

$=(-1)^0+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5$

$=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ㄱ, ㄷ

참고 수열 1, −1, 1, −1, 1, −1은 첫째항이 1, 공비가 −1인 등비수열이므로

$1-1+1-1+1-1=\sum_{k=1}^{6}(-1)^{k-1}$

과 같이 나타낼 수도 있다.

1-2

④ $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{40}j=\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+40)$

이므로 주어진 수열의 합과 같지 않다. 답 ④

유형 2

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4b_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-4\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}3$

$=2\times25-4\times15+3\times10$

$=20$ 답 ②

2-1

$\sum_{k=1}^{5}(2a_k-1)^2=\sum_{k=1}^{5}(4a_k^2-4a_k+1)$

$=4\sum_{k=1}^{5}a_k^2-4\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=4\times30-4\times10+5=85$ 답 ④

2-2

$\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$, $\sum_{k=1}^{n}b_k=-4n$에 $n=10$을 각각 대입하면

$\sum_{k=1}^{10}a_k=10^2=100$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=-4\times10=-40$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(3a_k+4b_k-1)=3\sum_{k=1}^{10}a_k+4\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=3\times100+4\times(-40)-10$

$=130$ 답 130

유형 3

$\sum_{k=1}^{10}(k+3)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-3)^2=\sum_{k=1}^{10}\{(k+3)^2-(k-3)^2\}$

$=\sum_{k=1}^{10}12k=12\sum_{k=1}^{10}k$

$=12\times\frac{10\times11}{2}$

$=660$ 답 ③

3-1

$\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3}{k+1}+\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3+1}{k+1}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{(k+1)(k^2-k+1)}{k+1}$

$=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k+1)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}+10$

$=385-55+10$

$=340$ 답 ⑤

3-2

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{2+4+6+\cdots+2k}{10k}=\sum_{k=1}^{20}\frac{2(1+2+3+\cdots+k)}{10k}$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{2\times\frac{k(k+1)}{2}}{10k}$$

$$=\sum_{k=1}^{20}\frac{k+1}{10}$$

$$=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{20}(k+1)$$

이므로 $a=10$

$\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{20}(k+1)=\frac{1}{10}\left(\frac{20\times21}{2}+20\right)=23$이므로

$b=23$

$\therefore a+b=10+23=33$ 답 ④

유형 4

수열 $1\times3,\ 2\times4,\ 3\times5,\ 4\times6,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(n+2)=n^2+2n$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 8 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(k^2+2k)$$

$$=\sum_{k=1}^{8}k^2+2\sum_{k=1}^{8}k$$

$$=\frac{8\times9\times17}{6}+2\times\frac{8\times9}{2}$$

$$=204+72$$

$$=276$$ 답 ③

4-1

수열 $1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(2n-1)^2=4n^2-4n+1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 12 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}(4k^2-4k+1)$$

$$=4\sum_{k=1}^{12}k^2-4\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}1$$

$$=4\times\frac{12\times13\times25}{6}-4\times\frac{12\times13}{2}+12$$

$$=2600-312+12$$

$$=2300$$ 답 ①

4-2

수열 $1\times19,\ 2\times18,\ 3\times17,\ \cdots,\ 19\times1$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(20-n)=-n^2+20n$

따라서 주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 19 항까지의 합이므로

$1\times19+2\times18+3\times17+\cdots+19\times1$

$$=\sum_{k=1}^{19}(-k^2+20k)$$

$$=-\sum_{k=1}^{19}k^2+20\sum_{k=1}^{19}k$$

$$=-\frac{19\times20\times39}{6}+20\times\frac{19\times20}{2}$$

$$=-2470+3800$$

$$=1330$$ 답 1330

유형 5

수열 $\frac{1}{3^2-1},\ \frac{1}{5^2-1},\ \frac{1}{7^2-1},\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n+1)^2-1}$$

$$=\frac{1}{4n^2+4n}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 14 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{14}a_k=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{14}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{15}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{15}\right)$$

$$=\frac{7}{30}$$ 답 ①

5-1

수열 $\frac{1}{1\times3},\ \frac{1}{3\times5},\ \frac{1}{5\times7},\ \cdots$의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 15 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{31}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{31}\right)=\frac{15}{31}$$ 답 ②

5-2

$a_n=\dfrac{1}{n^2+3n+2}$

$=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+2}\right)$

$=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n}{2(n+2)}$

즉, $\dfrac{n}{2(n+2)}=\dfrac{3}{7}$에서

$7n=6(n+2)$ $\therefore n=12$ 답 12

유형 6

수열 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$, …의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

따라서 주어진 식은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 99 항까지의 합이므로

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

$=\sum_{k=1}^{99} a_k=\sum_{k=1}^{99}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$

$=-1+\sqrt{100}$

$=9$ 답 ②

6-1

$\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\dfrac{2(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}$

$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k}$

이므로

$\sum_{k=1}^{49}\dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\sum_{k=1}^{49}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$

$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{50}-\sqrt{48})+(\sqrt{51}-\sqrt{49})$

$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{50}+\sqrt{51}$

$=-1-\sqrt{2}+5\sqrt{2}+\sqrt{51}$

$=\sqrt{51}+4\sqrt{2}-1$ 답 $\sqrt{51}+4\sqrt{2}-1$

6-2

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$이므로

$\dfrac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$

$=\dfrac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$

$=\dfrac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{12}\dfrac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$

$=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{12}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\dfrac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

$+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{23})\}$

$=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{25})=2$ 답 ③

교과서 문제 정복하기

본문 62~63쪽

01 ⑤	02 ④	03 ⑤	04 ②	05 ②
06 4	07 ①	08 ⑤	09 285	
10 $\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{81}$		11 4	12 $\dfrac{36}{55}$	13 ①
14 ③	15 82	16 2000		

01

$\sum_{k=2}^{50} a_k=4$에서

$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{50}=4$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{49} a_k=2$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{49}=2$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$a_{50}-a_1=4-2=2$ 답 ⑤

02

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2$ (참)

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n} 3^k=3+3^2+3^3+\cdots+3^n$

$\sum_{k=2}^{n+1} 3^k=3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{n+1}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} 3^k\neq\sum_{k=2}^{n+1} 3^k$ (거짓)

ㄷ. $\sum_{i=1}^{m-1} a_i+\sum_{j=m}^{n} a_j$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1})$

$\quad+(a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n)$

$=\sum_{k=1}^{n} a_k$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ④

03

$\sum_{k=1}^{6} 3^{k-1}=\frac{1\times(3^6-1)}{3-1}=\frac{729-1}{2}=364$ 답 ⑤

04

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{k=1}^{2n} a_k$

즉, $\sum_{k=1}^{2n} a_k=3n$이므로 이 식의 양변에 $n=10$을 대입하면

$\sum_{k=1}^{20} a_k=3\times10=30$ 답 ②

05

$\sum_{k=1}^{8}(2a_k+b_k)=20$에서 $2\sum_{k=1}^{8} a_k+\sum_{k=1}^{8} b_k=20$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{8}(a_k-b_k)=7$에서 $\sum_{k=1}^{8} a_k-\sum_{k=1}^{8} b_k=7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\sum_{k=1}^{8} a_k=9$, $\sum_{k=1}^{8} b_k=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{8}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{8} a_k+\sum_{k=1}^{8} b_k=9+2=11$ 답 ②

06

$\sum_{k=6}^{10} a_k=\sum_{k=1}^{10} a_k-\sum_{k=1}^{5} a_k=30-16=14$

$\sum_{k=6}^{10} b_k=\sum_{k=1}^{10} b_k-\sum_{k=1}^{5} b_k=20-(-4)=24$

$\therefore \sum_{k=6}^{10}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=6}^{10} a_k-\sum_{k=6}^{10} b_k$

$=2\times14-24=4$ 답 4

07

$\sum_{k=1}^{10}(2k+a)=2\sum_{k=1}^{10} k+\sum_{k=1}^{10} a$

$=2\times\frac{10\times11}{2}+10a$

$=110+10a$

즉, $110+10a=80$에서 $10a=-30$ $\therefore a=-3$ 답 ①

08

$\sum_{k=1}^{10}\left(\sum_{j=1}^{5} jk\right)=\sum_{k=1}^{10}\left(k\sum_{j=1}^{5} j\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(k\times\frac{5\times6}{2}\right)$

$=15\sum_{k=1}^{10} k$

$=15\times\frac{10\times11}{2}$

$=825$ 답 ⑤

09

위에서부터 각 층의 블록의 개수는

1^2, 2^2, 3^2, …

따라서 9층 탑을 만들었을 때 모든 블록의 개수는 각 층의 블록의 개수의 합이므로

$1^2+2^2+3^2+\cdots+9^2=\sum_{k=1}^{9} k^2$

$=\frac{9\times10\times19}{6}$

$=285$ 답 285

10

수열 1, 11, 111, …, $\underbrace{111\cdots1}_{n개}$의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=\underbrace{111\cdots1}_{n개}$

$=1+10+10^2+\cdots+10^{n-1}$

$=\frac{1\times(10^n-1)}{10-1}=\frac{10^n-1}{9}$

$\therefore 1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{n개}$

$=\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{9}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)$

$=\frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}$

$=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$ 답 $\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}$

11

$\sum_{k=1}^{80}\log_3\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$=\sum_{k=1}^{80}\log_3\frac{k+1}{k}$

$=\log_3\frac{2}{1}+\log_3\frac{3}{2}+\log_3\frac{4}{3}+\cdots+\log_3\frac{81}{80}$

$=\log_3\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{81}{80}\right)$

$=\log_3 81=\log_3 3^4=4$ 답 4

12

수열 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3+5}$, $\frac{1}{3+5+7}$, …의 일반항을 a_n이라 하면

$$a_n=\frac{1}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 9 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{9}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$$ 답 $\frac{36}{55}$

참고 $3+5+7+\cdots+(2n+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$
$$=n^2+2n$$

13

$$\frac{3}{\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k+4}}$$
$$=\frac{3(\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k+4})}{(\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k+4})(\sqrt{3k+1}-\sqrt{3k+4})}$$
$$=\sqrt{3k+4}-\sqrt{3k+1}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k+4}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{3k+4}-\sqrt{3k+1})$$
$$=(\sqrt{7}-\sqrt{4})+(\sqrt{10}-\sqrt{7})+(\sqrt{13}-\sqrt{10})$$
$$+\cdots+(\sqrt{3n+4}-\sqrt{3n+1})$$
$$=-\sqrt{4}+\sqrt{3n+4}$$
$$=-2+\sqrt{3n+4}$$

즉, $-2+\sqrt{3n+4}=6$에서 $\sqrt{3n+4}=8$

$3n+4=64$, $3n=60$

$\therefore n=20$ 답 ①

14

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2-2n$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2-2n)-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$
$=2n-3$ …… ㉠

이때 $a_1=-1$은 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-3$

따라서 $a_{2k}=2\times2k-3=4k-3$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}a_{2k}=\sum_{k=1}^{10}(4k-3)$$
$$=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=4\times\frac{10\times11}{2}-3\times10$$
$$=220-30=190$$ 답 ③

15

위에서 n번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2n-1$이므로 위에서 9번째 줄까지 나열된 수의 개수는

$$\sum_{k=1}^{9}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{9}k-\sum_{k=1}^{9}1=2\times\frac{9\times10}{2}-9=81$$

따라서 위에서 10번째 줄의 왼쪽에서 첫 번째에 있는 수는 82이다. 답 82

16

같은 수끼리 묶어서 생각해 보면 도형에 채운 모든 수의 합은

$$2+(4+4)+(6+6+6)+\cdots+(\underbrace{20+20+\cdots+20}_{10개})$$
$$+\cdots+(34+34+34)+(36+36)+38$$
$$=(2+38)+\{(4+4)+(36+36)\}$$
$$+\{(6+6+6)+(34+34+34)\}$$
$$+\cdots+(\underbrace{20+20+20+\cdots+20}_{10개})$$
$$=40+(40+40)+(40+40+40)$$
$$+\cdots+(\underbrace{20+20+20+\cdots+20}_{10개})$$
$$=40\times1+40\times2+40\times3+\cdots+40\times9+20\times10$$
$$=40(1+2+3+\cdots+9)+200$$
$$=40\sum_{k=1}^{9}k+200$$
$$=40\times\frac{9\times10}{2}+200$$
$$=2000$$ 답 2000

10 수학적 귀납법

교과서 유형 흐름잡기

› 본문 65~67쪽

유형 **1** ① **1**-1 ③ **1**-2 ⑤

유형 **2** ① **2**-1 ④ **2**-2 8

유형 **3** ③ **3**-1 ① **3**-2 1

유형 **4** $a_1=13$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

4-1 $a_1=92$, $a_{n+1}=\frac{9}{10}a_n+2$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

4-2 $a_1=14$, $a_{n+1}=2a_n-6$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

유형 **5** ⑤ **5**-1 (가) $(k+1)^2$ (나) $\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

5-2 풀이 참조

유형 1

$a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제 10 항은

$a_{10}=3\times10-1=29$ 답 ①

1-1

$a_1=6$, $a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열이다.

$\therefore a_n=6\times3^{n-1}$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제 15 항은

$a_{15}=6\times3^{15-1}=2\times3^{15}$ 답 ③

참고 $a_{n+1}=ra_n$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열이다.

1-2

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_1=3$, $a_2=5$에서 $a_2-a_1=5-3=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.

$\therefore a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

따라서 $a_5=11$, $a_6=13$, $a_7=15$이므로

$a_5+a_6+a_7=11+13+15=39$ 답 ⑤

유형 2

$a_{n+1}=a_n+2n$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2\times1=1+2=3$

$a_3=a_2+2\times2=3+4=7$

$a_4=a_3+2\times3=7+6=13$

$a_5=a_4+2\times4=13+8=21$

$a_6=a_5+2\times5=21+10=31$

$\therefore a_4+a_6=13+31=44$ 답 ①

2-1

$a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

$a_3=\frac{2}{3}a_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$a_4=\frac{3}{4}a_3=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

$a_5=\frac{4}{5}a_4=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

$a_6=\frac{5}{6}a_5=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$

$a_7=\frac{6}{7}a_6=\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{7}$

$\therefore 2a_7=2\times\frac{1}{7}=\frac{2}{7}$ 답 ④

2-2

$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}$에서 $a_{n+1}=a_n+2^{n+1}$

위의 식의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2^2=1+2^2$

$a_3=a_2+2^3=1+2^2+2^3$

$a_4=a_3+2^4=1+2^2+2^3+2^4$

$\vdots$

$\therefore a_n=a_{n-1}+2^n$

$=1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n-1}+2^n$

$=1+\frac{2^2\times(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^{n+1}-3$

$a_k=509$에서 $2^{k+1}-3=509$

$2^{k+1}=512=2^9$, $k+1=9$ $\therefore k=8$ 답 8

유형 3

$a_{n+1}=4a_n+3$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_2=4a_1+3=4\times2+3$

$a_3=4a_2+3=4(4\times2+3)+3$

$=4^2\times2+4\times3+3$

$a_4=4a_3+3=4(4^2\times2+4\times3+3)+3$

$=4^3\times2+4^2\times3+4\times3+3$

$\vdots$

$a_6=4a_5+3$

$=4^5\times2+4^4\times3+4^3\times3+4^2\times3+4\times3+3$

$=4^5\times2+3(4^4+4^3+4^2+4+1)$

$=4^5\times2+3\times\frac{4^5-1}{4-1}=4^5\times3-1$

$\therefore a_6+1=4^5\times3=3072$ 답 ③

다른풀이

$a_{n+1}=4a_n+3$에서 $a_{n+1}+1=4(a_n+1)$이므로

수열 $\{a_n+1\}$은 첫째항이 $a_1+1=2+1=3$, 공비가 4인 등비수열이다. 즉, $a_n+1=3\times4^{n-1}$

$\therefore a_6+1=3\times4^5=3072$

참고 $a_{n+1}=pa_n+q$ ($p\neq1$, $pq\neq0$) 꼴로 정의된 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 꼴로 변형하여 일반항을 구할 수 있다.

3-1

$a_{n+1}=2a_n+3$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 8을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+3=2\times1+3$

$a_3=2a_2+3=2(2\times1+3)+3$

$=2^2\times1+2\times3+3$

$a_4=2a_3+3=2(2^2\times1+2\times3+3)+3$

$=2^3\times1+2^2\times3+2\times3+3$

⋮

$a_9=2a_8+3$

$=2^8\times1+2^7\times3+2^6\times3+\cdots+2\times3+3$

$=2^8+3(2^7+2^6+\cdots+2+1)$

$=2^8+3\times\frac{2^8-1}{2-1}$

$=4\times2^8-3=2^{10}-3$

$\therefore a_9+3=2^{10}=1024$ 답 ①

3-2

$3a_{n+1}-a_n-6=0$에서 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+2$

위의 식의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2=\frac{1}{3}a_1+2=\frac{1}{3}\times4+2$

$a_3=\frac{1}{3}a_2+2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\times4+2\right)+2$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\times4+\frac{1}{3}\times2+2$

$a_4=\frac{1}{3}a_3+2=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\times4+\frac{1}{3}\times2+2\right\}+2$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^3\times4+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times2+\frac{1}{3}\times2+2$

⋮

$\therefore a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times4+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\times2+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}\times2$

$+\cdots+\frac{1}{3}\times2+2$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times4+2\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}+\cdots+\frac{1}{3}+1\right\}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times4+2\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times4+3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+3$

따라서 $p=\frac{1}{3}$, $q=3$이므로 $pq=1$ 답 1

유형 4

첫 번째 시행 후 그릇에 남아 있는 물의 양 a_1 L는 18 L의 $\frac{1}{3}$을 버리고 1 L를 새로 넣은 양이므로

$a_1=18\times\frac{2}{3}+1=13$

또한, $(n+1)$번째 시행 후 그릇에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L는 n번째 시행 후 그릇에 남아 있는 물의 양 a_n L의 $\frac{1}{3}$을 버리고 1 L의 물을 새로 넣은 양이므로

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

답 $a_1=13$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+1$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

참고 $\frac{1}{3}$을 버리면 그릇에 남아 있는 물의 양은 $\frac{2}{3}$이다.

4-1

1일 후 물탱크에 남아 있는 물의 양 a_1 L는 100 L의 10 %, 즉 $\frac{1}{10}$을 퍼내고 2 L의 물을 새로 넣은 양이므로

$a_1=100\times\frac{9}{10}+2=92$

또한, $(n+1)$일 후 물탱크에 남아 있는 물의 양 a_{n+1} L는 n일 후 물탱크에 남아 있는 물의 양 a_n L의 $\frac{1}{10}$을 퍼내고 2 L의 물을 새로 넣은 양이므로

$a_{n+1}=\frac{9}{10}a_n+2$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

답 $a_1=92$, $a_{n+1}=\frac{9}{10}a_n+2$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

4-2

1시간 후 살아 있는 미생물의 수 a_1은 10마리에서 3마리가 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열한 수이므로

$a_1=2\times(10-3)=14$

또한, $(n+1)$시간 후 살아 있는 미생물의 수 a_{n+1}은 n시간 후 살아 있는 미생물의 수 a_n에서 3마리가 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열한 수이므로

$a_{n+1}=2(a_n-3)$

$\therefore a_{n+1}=2a_n-6$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

답 $a_1=14$, $a_{n+1}=2a_n-6$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

유형 5

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$, (우변)$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$을 더하면

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\boxed{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\boxed{\frac{k+1}{k+2}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 ⑤

5-1

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

위의 등식의 양변에 $\boxed{(k+1)^2}$을 더하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$=\boxed{\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 (가) $(k+1)^2$ (나) $\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

5-2

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, (우변)$=\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}=\frac{2k+1}{k+1}$$

이때

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

이므로 $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

답 풀이 참조

교과서 문제 정복하기

› 본문 68~69쪽

01 $\frac{1}{32}$ **02** ① **03** ③ **04** 제50항
05 ① **06** 제9항 **07** ⑤ **08** 6
09 $p=\frac{4}{5}$, $q=2$
10 $a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ **11** 128
12 ⑤ **13** $\frac{1}{2}$ **14** 풀이 참조

01

$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

$a_1=2$, $a_2=1$에서 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore a_n=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 $a_4=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$, $a_5=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$이므로

$$a_4a_5=\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{32}$$

답 $\frac{1}{32}$

02

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_1=1$, $a_2=-2$에서 $a_2-a_1=-2-1=-3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 -3인 등차수열이다.

$\therefore a_n=1+(n-1)\times(-3)=-3n+4$

$a_k=-101$에서 $-3k+4=-101$

$-3k=-105$ $\therefore k=35$ 답 ①

03

$a_1=10$, $a_{n+1}=a_n+2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 2인 등차수열이다.

$\therefore a_n=10+(n-1)\times2=2n+8$

$a_n>200$에서 $2n+8>200$

$2n>192$ $\therefore n>96$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 97이다. 답 ③

04

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n(n+1)}$, 즉 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+1-\frac{1}{2}=1+1-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}$

$a_3=a_2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$=2-\frac{1}{3}$

$a_4=a_3+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=2-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$=2-\frac{1}{4}$

⋮

$\therefore a_n=2-\frac{1}{n}=\frac{2n-1}{n}$

$\frac{99}{50}$를 제 k 항이라 하면 $\frac{2k-1}{k}=\frac{99}{50}$

$50(2k-1)=99k$ $\therefore k=50$

따라서 $\frac{99}{50}$는 제 50 항이다. 답 제 50 항

05

$a_{n+1}=2^n a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, 9를 차례로 대입하면

$a_2=2^1\times a_1=2\times1$

$a_3=2^2\times a_2=2^2\times2\times1$

$a_4=2^3\times a_3=2^3\times2^2\times2\times1$

⋮

$\therefore a_{10}=2^9\times a_9$

$=2^9\times2^8\times\cdots\times2\times1$

$=2^{1+2+\cdots+9}$

$=2^{\frac{9\times10}{2}}=2^{45}$ 답 ①

06

$a_{n+1}=2a_n+2$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+2=2\times3+2$

$a_3=2a_2+2=2(2\times3+2)+2$

$=2^2\times3+2^2+2$

$a_4=2a_3+2=2(2^2\times3+2^2+2)+2$

$=2^3\times3+2^3+2^2+2$

⋮

$\therefore a_n=2a_{n-1}+2$

$=2^{n-1}\times3+2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2$

$=2^{n-1}\times3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=3\times2^{n-1}+2\times2^{n-1}-2=5\times2^{n-1}-2$

$a_n>998$에서 $5\times2^{n-1}-2>998$

$5\times2^{n-1}>1000$, $2^{n-1}>200$

$2^7=128$, $2^8=256$이므로 $n-1\geq8$ $\therefore n\geq9$

따라서 처음으로 998보다 커지는 항은 제 9 항이다.

답 제 9 항

07

$a_{n+2}-a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=4-1=3$

$a_4=a_3-a_2=3-4=-1$

$a_5=a_4-a_3=-1-3=-4$

$a_6=a_5-a_4=-4-(-1)=-3$

$a_7=a_6-a_5=-3-(-4)=1$

$a_8=a_7-a_6=1-(-3)=4$

$a_9=a_8-a_7=4-1=3$

$a_{10}=a_9-a_8=3-4=-1$

$a_{11}=a_{10}-a_9=-1-3=-4$

$a_{12}=a_{11}-a_{10}=-4-(-1)=-3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 1, 4, 3, -1, -4, -3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $50=6\times8+2$이므로

$a_{50}=a_2=4$ 답 ⑤

08

$a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하면

$a_2=2\times a_1$

$a_3=3\times a_2=3\times2\times a_1$

$a_4=4\times a_3=4\times3\times2\times a_1$

⋮

$\therefore a_n=n\times a_{n-1}$

$=a_1\times2\times3\times4\times\cdots\times n$

$=2\times(1\times2\times3\times\cdots\times n)$

$=2n!\ (n\geq2)$

이때 $5!=5\times4\times3\times2\times1$에서 $5!$, $6!$, $7!$, …은 모두 10으로 누어 떨어지므로 a_5 이후의 항은 모두 10으로 나누었을 때의 나머지가 0이 된다.

즉, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$을 10으로 나누었을 때의 나머지는 $a_1+a_2+a_3+a_4$를 10으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때

$$a_1+a_2+a_3+a_4=2+2\times2!+2\times3!+2\times4!$$
$$=2+4+12+48=66$$

이므로 구하는 나머지는 6이다. 답 6

09

n회 시행 후 농도가 a_n %인 소금물 100 g에서 소금물 20 g을 덜어 내고 남은 80 g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100}\times80=\frac{4}{5}a_n(\text{g})$$

또한, 농도가 10 %인 소금물 20 g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{10}{100}\times20=2(\text{g})$$

따라서 $(n+1)$회 시행 후 소금물 100 g의 농도 a_{n+1} %는

$$a_{n+1}=\frac{\frac{4}{5}a_n+2}{100}\times100=\frac{4}{5}a_n+2$$

$\therefore p=\frac{4}{5}$, $q=2$ 답 $p=\frac{4}{5}$, $q=2$

참고 각 시행에서 소금물 20 g을 덜어 내고 물 20 g을 다시 넣으므로 소금물의 양은 100 g으로 일정하다.

10

[1단계]의 도형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수는

$a_1=3$

[2단계]의 도형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수는

$a_2=a_1+3\times2$

[3단계]의 도형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수는

$a_3=a_2+3\times3$

⋮

따라서 [$(n+1)$단계]의 도형을 만드는 데 필요한 성냥개비의 개수는

$a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

답 $a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

11

$S_{n+1}=2S_n$에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=a_1=4$, 공비가 2인 등비수열이므로

$S_n=4\times2^{n-1}=2^{n+1}$

$\therefore a_7=S_7-S_6$

$=2^8-2^7=2^7=128$ 답 128

12

ㄱ. $p(1)$이 참이면 $p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, …이 모두 참이지만 $p(4)$가 참인지는 알 수 없다. (거짓)

ㄴ. $p(2)$가 참이면 $p(4)$, $p(6)$, $p(8)$, …이 모두 참이다.
즉, 모든 자연수 n에 대하여 $p(2n)$이 참이다. (참)

ㄷ. $p(1)$이 참이면 $p(3)$, $p(5)$, $p(7)$, …이 모두 참이고, $p(2)$가 참이면 $p(4)$, $p(6)$, $p(8)$, …이 모두 참이다.
즉, 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

13

(i) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=\frac{1}{2}$, $(\text{우변})=2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$$

위의 등식의 양변에 $\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}$을 더하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}$$
$$=2-\frac{k+2}{2^k}+\boxed{\frac{k+1}{2^{k+1}}}=2-\frac{2k+4}{2^{k+1}}+\frac{k+1}{2^{k+1}}$$
$$=2-\boxed{\frac{k+3}{2^{k+1}}}=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

이때 $f(k)=\frac{k+1}{2^{k+1}}$, $g(k)=\frac{k+3}{2^{k+1}}$이므로

$$\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{\frac{2}{2^2}}{\frac{4}{2^2}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

14

(i) $n=5$일 때, $(\text{좌변})=2^5=32$, $(\text{우변})=5^2=25$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq5)$일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2$

위의 부등식의 양변에 2를 곱하면

$2^k\times2>k^2\times2$, 즉 $2^{k+1}>2k^2$

그런데 $k\geq5$일 때

$2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1=(k-1)^2-2>0$

이므로 $2k^2>(k+1)^2$

$\therefore 2^{k+1}>(k+1)^2$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. 답 풀이 참조